Introducción a la física para ingenieros

Marcelo Navarro Ojeda
Rafael Pérez Pupo

ESPOCH

2020

Introducción a la Física para Ingenieros

Introducción a la Física para Ingenieros

Sistema Internacional de Unidades Elementos de Trigonometría Física vectorial

Marcelo Nelson Navarro Ojeda
Juan Rafael Pérez Pupo

DIRECCIÓN DE PUBLICACIONES

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
Fundada en 1972
Riobamba - Ecuador

Introducción a la Física para ingenieros

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½
Instituto de Investigaciones
Dirección de Publicaciones Científicas
Riobamba, Ecuador
Teléfono: 593 (03) 2 998-200
Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH
Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (*peer review*)

Corrección y diseño:
La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

CDU: 531.3
Introducción a la Física para ingenieros
Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Instituto de Investigaciones
Dirección de Publicaciones, año 2020
235 pp. vol: 17,6 x 25 cm
ISBN: 978-9942-36-963-5
1. Física.
2. Mecánica
3. Mecánica racional (de los cuerpos sólidos y rígidos)

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

PRÓLOGO

La Física es una ciencia de una notabilísima importancia; ya que la misma es soporte decisivo de otras ciencias, y especialmente en el contexto de las ingenierías.

Tratar de dar explicación a los fenómenos naturales, fenómenos que pueden estar presentes en infinidad de ámbitos, es una de las misiones fundamentales de la Física.

Pero, la Física busca apoyo en otra importantísima disciplina: las Matemáticas. No por gusto, Aristóteles, citando a Platón sentenció: “Si yo estuviera comenzando de nuevo mis estudios, me gustaría seguir el consejo de Platón y empezar con las matemáticas”.

Y es que estas dos ciencias se encuentran imbricadas, en una relación indisoluble. Las Matemáticas, a través de sus diferentes ramas, facilitan a la Física las herramientas indispensables que le permiten obtener diversos modelos matemáticos, y así poder explicar los más disimiles fenómenos.

Este libro vio la luz por la motivación de los autores para llenar las falencias que presentan los estudiantes de ingeniería que comienzan sus estudios universitarios. Se observan a diario evidentes lagunas de conocimiento al trabajar con los sistemas de unidades y sus conversiones: muy poco dominio en las conversiones lineales, bi y tri dimensionales, y el no uso de la notación científica, como facilitadora de las mismas. Similares deficiencias se pueden constatar en la diferenciación de los escalares físicos y las magnitudes vectoriales: confunden estos dos importantes conceptos de la física; ignorando las propiedades de uno y otro; lo mismo llaman a los vectores fuerza o velocidad como escalares, que nombran a la viscosidad, densidad, temperatura, etc., como vectores. El poco uso o inadecuada aplicación de la Trigonometría en la solución de problemas en el contexto del Algebra Vectorial emerge como otro serio problema metodológico y conceptual que tratar; pues, por ejemplo, no logran ver el aporte trascendental del uso de la trigonometría en hallar las componentes ortogonales de un vector; al calcular el trabajo, multiplican, p. ej., un vector “v” inclinado, por el vector desplazamiento;

obviando el cálculo de la componente que va en sentido o en contra del movimiento, según sea el caso; obteniéndose un resultado incorrecto, acompañado de un craso error conceptual.

UNA NECESARIA SALVEDAD

En ningún momento pretende ser este libro un texto de matemáticas, pues ese no constituye su objetivo fundamental; sino, vista las falencias anteriores, simplemente dotar al estudiante, que ingresa a las carreras de ingeniería, de los rudimentos matemáticos, básicos e indispensables, que le permitan tener una adecuada interpretación de los fenómenos en el ámbito de la Física y su aplicación a las ingenierías.

En este primer tomo, en su introducción, se incursiona sobre las muy disímiles necesidades y problemas que el hombre ha tenido que enfrentar y darle solución, en el constante desarrollo de la sociedad. Incursionar sobre una rápida panorámica, utilizando elementos gráficos ayuda a comprender esos retos y dificultades que ha tenido que vencer; como supo, por solo citar un solo ejemplo, aprovechar la colosal energía potencial que poseen las aguas de las cataratas y transformarla en la hoy indispensable energía eléctrica. En la primera sección del texto, en su introducción, se puede observar una secuencia gráfica de las monumentales hidroeléctricas que el hombre ha construido, valiéndose del conocimiento y aplicación de los principios y leyes de la Física, aplicándola en las ingenierías.

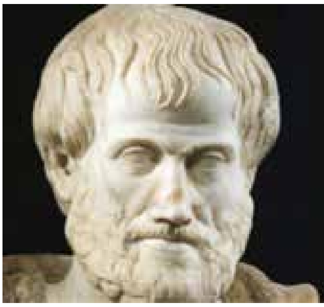
En esta rápida incursión por el tiempo, primero vemos al hombre prehistórico enfrentándose a las muy difíciles condiciones de subsistencia, venciendo el hambre; e, intuitivamente, al intenso frío cuando se cubre con las pieles de los animales cazados, aunque aún no conociera los principios de la transferencia de calor. Pero después su mirada va más lejos, urgido por las ingentes necesidades, y es así como aprende a volar y transportarse en los muy variados medios que hoy la sociedad posee: inmensos trasatlánticos y aviones ha construido el hombre gracias al conocimiento de la Física y su aplicación práctica, aprendiendo y utilizando las poderosas fuerzas de la naturaleza y poniéndolas a su servicio. Inventa canales para el abastecimiento de agua, molinos para moler cereales primero, y posteriormente se proyecta en monumentales parques eólicos y transforma la energía cinética de los vientos en la imprescindible energía eléctrica: motor impulsor del progreso de la Humanidad.

Y, solamente, a manera de ejemplo, se muestran algunos elementos gráficos de estos retos y progresos. Más que la introducción a este primer tomo, es la introducción de a una serie de obras que tratarán sobre diferentes campos de la física mecánica: cinemática, dinámica, transferencia de calor y mecánica de los fluidos.

En esta primera parte introductoria y capítulo uno, los autores han considerado útil la inserción de notas aclaratorias, separados de la línea temática central, que permiten al estudiante ampliar su horizonte, y motivarlo a elevar su cultura general. Se deja a elección y/o motivación del lector consultarlos o no.

Si la presente obra logra servir como material de consulta y contribuir a borrar las citadas lagunas del conocimiento, los autores estarán plenamente satisfechos en su esfuerzo. Es una obra hecha con mucho amor hacia nuestros estudiantes, pensando siempre en su mejor formación como futuros profesionales.

INTRODUCCIÓN



Nunca se alcanza la verdad total, ni nunca se está totalmente alejado de ella.

Aristóteles

El hombre siempre ha tenido curiosidad e imperiosa necesidad de desentrañar los muy disimiles fenómenos que ocurren a su alrededor; y, es precisamente, en este contexto, donde la Física encuentra —como la ciencia de indiscutible valor e importancia gnoseológica y epistemológica que es—, un vastísimo campo de acción en el estudio de las manifestaciones y los fenómenos que acontecen en el ámbito de la naturaleza, en busca de hallar las causas y la verdad sobre los hechos que ocurren.

Y fue, gracias a esa curiosidad e imperiosa necesidad, que el hombre llegó a utilizar las pieles de animales para cubrirse del implacable frio[1], sin sospechar siquiera que se trataba de un fenómeno de inhibir la transferencia de calor al medio. En la figura 1-a, se puede observar una alegoría del hombre que existió durante el largo período del Paleolítico Inferior, en pleno faenamiento de una caza (fue la etapa más prolongado de la prehistoria; se considera que comenzó hace unos 2,5 millones de años) [1]; y , en la figura 1-b aparece una representación gráfica del hombre perteneciente al Paleolítico Superior: aproximadamente entre los años

(1) "El cazador anónimo que un día, tras comparar su cuerpo desnudo con el de un animal recién abatido, constató su evidente inferioridad en cuanto a protección térmica y, saqueando a su víctima, se cubrió de una masa caliente de pelo y sangre, [...] la materia más aislante jamás hallada" [74]

Fig. 1. (a) Hombre del Paleolítico Inferior extrayendo la piel de un animal. (b) Hombre del Paleolítico Superior transportando el botín de caza

(a)

(b)

Fuente:: [https://khronoshistoria.com/
https://www.morgenpost.de/web-wissen/article104928515/Neue-Trend-Diaet-Essen-wie-die-Steinzeitmenschen.html

40 - 30 mil antes del presente [2]. En ambos casos, tenían como objeto principal la caza para su sustento alimenticio y las pieles para su vestimenta.

Igualmente, cuando pudo apoderarse del fuego [2] que le sirvió para calentarse y cocinar sus alimentos —al asar un trozo de carne, por ejemplo—, e incluso trasportarlo, hace 800 mil años, no sabía que se trataba de fenómenos tan conocidos hoy día como la transferencia de calor por radiación y conducción respecti-

Fig. 2. (a) Hombre prehistórico utilizando el fuego en la preparación de sus alimentos. (b) Prometeo transportando el fuego divino

(a)

(b)

Fuentes: https://www.curiosfera.com/evolucion-de-la-alimentacion-humana/
http://es.mitologiagriega.wikia.com/wiki/Prometeo

vamente. En la figura 2-a, aparece el hombre prehistórico utilizando el fuego en la preparación de sus alimentos [3]. Hermosa representación gráfica de Prometeo, transportando el fuego robado a los dioses, la que aparece en la figura 2-b [4].

Por ello, el hombre se ha convertido en un constante observador de la naturaleza, un activo observador de los fenómenos que en ella tienen lugar; y, gracias a ello, ha podido elevar a planos superiores su bienestar.

El hombre observó el vuelo de los pájaros y, quiso volar. ¡Y lo logró! En las figuras 3-a y 3-b, se puede observar el majestuoso vuelo del ave, en contraposición al desafío y anhelo del hombre de poder volar.

Fig. 3. (a) Vistoso papagayo en pleno vuelo. (b) Hombre suspendido en el aire por la acción de sus alas mecánicas

(a) (b)

Fuentes:
https://www.shutterstock.com/es/search/papagayo?page=2
https://www.taringa.net/posts/imagenes/17226923/Volar-no-es-solo-para-pajaros-recomendado.html

Hoy, surcan los cielos del mundo miles de aviones modernos, que permiten trasladarse de un continente a otro en solo unas pocas horas. Un ejemplo de ello es el Airbus 380, que dispone de una capacidad de más de 800 pasajeros: un verdadero portento de la ingeniería aeronáutica moderna (ver fig. 4).

Fig. 4. Fotografía del Airbus 380

Fuentes:
https://www.google.com.ec/search?q=imagen+air+bus&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=2ahUKEwitjKS2i9vcAhVO6lMKHUL9DtcQsAR6BAgDEAE&biw=1440&bih=794#imgrc=1cMvt-A3UitJaM

El hombre observó la fuerza del viento y se ingenió para aprovecharla. Primero para moler los granos —maíz, cebada, entre otros—, drenar humedales, serrar madera, etc. en los molinos que datan del medioevo; después utilizó esa misma

Fig. 5. (a) Cocotero azotado por la fuerza del viento.
(b) Estampa de los Molinos de Consuegra en Castilla La Mancha

(a) (b)

Fuentes: https://www.lavozdeasturias.es/video/actualidad/2017/09/09/fuertes-rachas-viento-causadas-huracan-irma-azotan-costas-cuba/0031_201709557032258400 1.htm
https://www.65ymas.com/ocio/viajes/ruta-molinos-viento-en-castilla-la-mancha_17877_102.html

energía para producir electricidad. La intangibilidad del viento (el aire en movimiento) no es óbice para constatar su tremenda fuerza; que en ocasiones se torna incontrolable (ver fig. 5-a). En la figura 5-b, aparece una bella estampa manchega: los Molinos de Consuegra, que datan de la época medioeval [5].

Muchos países transforman la energía de los vientos en electricidad. Gracias a ello han surgido modernos parques eólicos en diferentes partes del mundo(2) (ver fig. 6a: parque eólico en tierra, y fig. 6b: parque eólico situado en el mar). Holanda, por ejemplo, tiene más de 1000 molinos de viento históricos y numerosas turbinas eólicas modernas repartidos por todo su territorio. En 2009, solo las turbinas eólicas terrestres, sobre todo en el norte del país, generaron casi 2000 megavatios [6].

Fig. 6. (a) Parque eólico en tierra. (b) Parque eólico situado en el mar

(a) (b)

Fuente:
http://www.dforcesolar.com/energia-solar/como-saber-si-es-un-buen-lugar-para-instalar-un-parque-eolico/
https://www.abc.es/20110311/sociedad/abci-eolica-marina-contra-viento-201103110827.html

Igualmente, el hombre observó la corriente de los ríos e inventó los canales de abasto de agua y los regadíos. En la figura 7.a se puede ver la fuerza del agua, en el río Salmon, Idaho, EE. UU., y en la figura 7.b, una foto del complejo Canal

(2) "Tres países europeos, Alemania, Dinamarca y Holanda, van a crear el mayor proyecto de integración de renovables de la historia. Ellos lo llaman el Silicon Valley de la eólica marina. Para ello, van a crear una isla artificial en mitad del Mar del Norte (Dogger Bank) desde la cual se va a operar la integración de hasta 100 GW de eólica marina que estarán conectados a través de una plataforma". Fuente: [75]

de Navarra, en España. "El 22 de marzo de 2011, casi 10 años después, concluyó su construcción. Su trazado va desde el embalse de Itoiz y hasta Pitillas. Entre los dos puntos hay construidos 101 kilómetros de canal principal a 'cielo abierto' que abastecen a 22 472 hectáreas (todas ellas eran de secano y se han transformado en regadío)" [7]

Fig. 7. (a) Foto del río Salmon, en Idaho, EE. UU.
(b) Canal de Navarra. Conduce las aguas del río Irati a las zonas central meridional de Navarra, España

(a) (b)

Fuentes:
https://www.lonelyplanet.es/blog/los-mejores-rios-para-hacer-rafting
https://www.diariodenavarra.es/noticias/navarra/2017/02/15/ocho_preguntas_para_descifrar_canal_navarra_517151_300.html

Deslumbrantes, por su portento ingenieril, se distinguen los sistemas de abasto de agua de la civilización inca. En la figura 8, se puede apreciar una vista panorámica de la monumental ciudad de Machu Picchu. La gestión y distribución de agua en Machu Picchu —situada en la vertiente oriental de la cordillera Central, al sur del Perú—, es un ejemplo sorprendente de la ingeniería hidráulica notable de esta cultura incaica antigua(3). "Construida a mediados del siglo XV y se cree

(3) A partir de la primavera, el canal corre por el lado de la montaña y entra en la ciudad, a través de la zona agrícola y en la zona urbana. Hay dos puntos de control. Si el flujo es demasiado alto, hay dos puntos de desbordamiento; en primer lugar, sobre el cultivo en terrazas y abajo de los acantilados o en el punto de la red principal de alcantarillado de aguas usadas.". Fuente: https://peru-turismo.com/BlogPeru/?q=node/12

que fue una de las residencias del noveno inca del Tahuantinsuyo, Pachacútec" [8]. Su nombre significa montaña vieja, y hace alusión al lugar donde se ubica, a unos 2453 m. s. n. m., en un premonitorio rocoso entre Machu Picchu y Huayna Picchu.

Fig. 8. Foto de la monumental Machu Picchu

Fuente: https://www.nationalgeographic.com.es/destinos/machu-picchu

La ingeniería hidráulica de los incas fue realmente sorprendente. En la figura 9.a, se observa una de las partes del canal de abasto de agua: "El canal que trae el agua a Machu Picchu es de 750 metros de largo, 12 centímetros de profundidad y 15 centímetros de ancho. Para cada 100 metros de distancia recorrida, desciende 10 metros, por lo que la gravedad podría mantener un flujo de 300 litros por minuto" [9]. En la figura 9.b, se puede apreciar como "el agua viajaba a través de los canales en fuentes de 16, conocida como la escalera de fuentes, reservando la primera fuente de agua para el emperador" [10].

Fig. 9. (a) Fotografía mostrando una porción del canal (de 750 metros de largo) que trae el agua a Machu Picchu. (b) Foto de una de las “escalera de fuentes”, a lo largo del canal

(a) (b)

Fuentes:
https://www.arqhys.com/articulos/ingenieros-incas-hidraulica.html
https://www.peru-turismo.com/BlogPeru/?q=node/12

El hombre observó el potencial enorme de las aguas cuando caían desde una altura e inventó las represas y construyó las hidroeléctricas. Transformó esa energía potencial hidráulica en corriente eléctrica. Ejemplos de ello lo son las centrales hidroeléctricas de: Las Tres Gargantas, sobre el río Yangtsé en China; la represa de Itaipú entre los países de Brasil y Paraguay; la Presa de Guri, Central Hidroeléctrica Simón Bolívar, en Venezuela; la presa de Tucuruí en Brasil y finalmente la presa Grand Coulee en los Estados Unidos de Norteamérica que se encuentran entre las cinco presas más grandes del mundo. Solo la central Tres Gargantas posee una capacidad total de 22 500 MW [11].

La figura 10 muestra dos facetas en un mismo fenómeno. La energía potencial que poseen las aguas de una catarata (vista de la izquierda) y esa misma energía potencial aprovechada por el hombre con la construcción de una hidroeléctrica (vista derecha).

Fig. 10. (a) Catarata. (b) Hidroeléctrica

(a) (b)

Fuentes:
http://geomorf4.blogspot.com/p/sistema-morf.html
http://www.vocesenelfenix.com/content/an%C3%A1lisis-de-los-costos-de-capital-o-inversi%C3%B3n-en-la-generaci%C3%B3n-de-energ%C3%AD-y-su-impacto-en-los

La figura 11 muestra una sorprendente vista de una de las presas más grandes del mundo: la Tres Gargantas. La capacidad instalada de la presa es de 22 500 megavatios, un tercio más que la de Itaipú, en el río Paraná.

Fig. 11. Presa de las Tres Gargantas, situada sobre el río Yangtsé en China

Fuente: https://www.fundacionaquae.org/blog/el-rio-yangtse-y-la-presa-de-las-tres-gargantas/

Tres Gargantas. El diseño de esta presa es el de una presa de gravedad hecha de concreto: "De 185 m de altura (con 175 m de agua en el nivel normal de almacenamiento o nivel normal del embalse) y cerca de 2 310 m de ancho; su capacidad total de almacenamiento se calcula en 39 300 millones de metros cúbicos y 22 100 millones de metros cúbicos de capacidad para el control de inundaciones" [12].

Itaipú. La hidroeléctrica de Itaipú es una represa binacional de Paraguay y Brasil, en su frontera sobre el río Paraná(4). Posee un desnivel de 120 m de caída bruta nominal; posee 20 turbinas de 700 MWh; ostenta el título de "Una de las Siete maravillas del Mundo Moderno". En Brasil, tendrían que quemarse 434 000 barriles de petróleo por día —en las diferentes termoeléctricas— para obtener la misma cantidad de energía eléctrica obtenida por Itaipú. En su construcción, se emplearon 12,3 millones de m³ de concreto —con los cuales podrían ser construidos 210 estadios como el Maracaná en Brasil—; con el hierro y acero utilizados se podrían construir 380 torres Eiffel [13] (ver fig. 12).

Fig. 12. La represa hidroeléctrica de Itaipú

Fuente: http://www.mauriciotravels.com/wp-content/uploads/2015/08/Itaipu-tour-1024x683.jpg

(4) Itaipú (del guaraní, 'piedra que suena'). "El área implicada en el proyecto se extiende desde Foz do Iguaçu, en Brasil, y Ciudad del Este, en Paraguay, por el sur, hasta Guaíra (Brasil) y Salto del Guairá (Paraguay), por el norte. El lago artificial de la represa contiene 29 000 hm³ de agua, con unos 200 km de extensión en línea recta, y un área aproximada de 1400 km²" (https://brainly.lat/tarea/7187651)

Central Hidroeléctrica Simón Bolívar.(5) También llamada Represa de Guri (ver fig. 13), se encuentra ubicada en el estado Bolívar, en el cañón de Necuima, 100 kilómetros aguas arriba de la desembocadura del río Caroní en el Orinoco.

Fig. 13. Presa Simón Bolívar (Represa de Gurí)

Fuente: http://1.bp.blogspot.com/-ZzmhHbHf4uc/VFzbc-PNVlI/AAAAAAAC3Go/TVPW6qdSgWo/s1600/Nueva-imagen.jpg

Presa Tucuruí.(6) "La central hidroeléctrica se inauguró en 1984. La electricidad de los estados de Pará, Tocantins y Maranhão procede casi toda de la central hidroeléctrica de Tucuruí. Es una de la mayores obras de ingeniería mundial y la mayor productora de electricidad de Brasil, solo por detrás de Itaipú, que es una presa compartida con Paraguay" [14] (ver fig. 14).

(5) "Construida entre 1963 y 1986 en el cañón de Necuima (cuenca del río Caroní, estado Bolívar, Venezuela) [...] tiene una capacidad total de producción de 10 200 MW con una producción anual máxima de 46 TWh, y ocupa un área de superficie de 4250 kilómetros cuadrados (equivalentes a 1641 millas cuadradas o 425 000 hectáreas)" (http://emiroduran.blogspot.com/2016/05/la-represa-del-guri-central.html)

(6) "La presa de Tucuruí (guaraní, Tucuruí, portugués, Tucuruí) es una presa hidroeléctrica en el río Tocantins ubicada en el condado de Tucuruí en Brasil. El nombre Tucuruí proviene de la pequeña ciudad que existía cerca del lugar de la construcción. La capacidad de generación instalada en la planta es de 8370 MW, con 24 unidades generadoras, lo que significa la mayor central hidroeléctrica por potencia de origen únicamente brasileño. Tiene 11 kilómetros de largo y alcanza una altura de 78 metros" (http://megaconstrucciones.net/?construccion=presa-tucurui)

Fig. 14. Presa hidroeléctrica en el río Tocantins ubicada en el condado de Tucuruí en Brasil

Fuente: http://megaconstrucciones.net/?construccion=presa-tucurui

Presa Grand Coulee.(7) Se encuentra ubicada en los Estados Unidos de Norteamérica, específicamente, en el río Columbia del estado de Washington. La mayor parte de la energía de los EE. UU. se obtiene de esta presa, "la cual se considera como la mayor estructura de hormigón del país" [15] (ver fig. 15).

Para llegar a todos esos logros, tuvieron que pasar muchas centurias; se fueron sucediendo innumerables descubrimientos, principios y leyes físicas que se tradujeron en modelos matemáticos, que permitieron entender mejor el mundo que nos rodea. Todo en una armónica interrelación causa-efecto. El hombre, al estudiar los fenómenos de la naturaleza (efectos), quiso conocer sus causas, quiso comprender y descubrir la génesis de los mismos: por qué se producían.

(7) "Todas las tardes, desde el 1989, se proyecta un espectáculo con luces de láser en el muro de la presa, el cual presenta imágenes de la Estatua de la Libertad y de acorazados" (https://www.arqhys.com/construccion/presa-grandcoulee.html).

Fig. 15. Presa Grand Coulee en los Estados Unidos de Norteamérica

Fuente: http://megaconstrucciones.net/?construccion=presa-tucurui

Muy variados han sido los tipos de investigaciones —exploratorias, descriptivas, correlacionales o explicativas—, llevados a cabo en la búsqueda de la verdad, en la búsqueda del conocimiento, con una visión epistemológica como se denomina en nuestros días; pero que, innegablemente, el hombre siempre buscó la verdad en la formación del conocimiento; donde se distingue a Sócrates como el maestro indiscutible de Platón, mientras que Aristóteles fue el alumno más brillante de este último, por solo citar algunos de los más prominentes pensadores de la filosofía griega[8].

(8) **Aristóteles**: "La filosofía occidental se asienta en la obra de los tres grandes filósofos griegos de la Antigüedad: Sócrates, Platón y Aristóteles. Pese a la singular relación que los unió (Sócrates fue maestro de Platón, quien lo fue a su vez de Aristóteles), la orientación de su pensamiento tomó distintos caminos, y correspondería a Aristóteles culminar los esfuerzos de sus maestros y ejercer la influencia más perdurable, no solo en el terreno de la filosofía y la teología, sino prácticamente en todas las disciplinas científicas y humanísticas. De hecho, por el rigor de su metodología y por la amplitud de los campos que abarcó y sistematizó, Aristóteles puede ser considerado el primer investigador científico en el sentido moderno de la palabra". Aristóteles nació en el año 384 a.C. en Estagira, una pequeña localidad macedonia cercana al monte Athos (http://www.biografiasyvidas.com/monografia/aristoteles/).

Y fueron hombres de ciencia, principalmente filósofos, físicos, matemáticos, astrónomos, tales como Arquímedes(9) (287 a.C. - id., 212 a.C.), pionero de la hidrostática; Leonardo da Vinci(10) (1452-1519), visto como el paradigma del *homo universalis*, del sabio renacentista versado en todos los ámbitos del conocimiento humano; Galileo(11) (1564-1642), considerado como el padre de la astronomía moderna, el padre de la Física moderna y el padre de la ciencia; Torricelli(12) (1608 – 1647), precursor en la invención del barómetro; Pascal(13) (1623-1662), importantes y precursoras aportaciones a la Física y a las matemáticas en la mecánica de los fluidos: la hidrostática; Isaac Newton(14) (1642-1727), eminentes descubri-

(9) **Arquímedes**: "Siracusa, actual Italia, (h. 287 a.C.- id., 212 a.C.) Matemático griego. Los grandes progresos de las matemáticas y la astronomía del helenismo son deudores, en buena medida, de los avances científicos anteriores y del legado del saber oriental, pero también de las nuevas oportunidades que brindaba el mundo helenístico. En los inicios de la época helenística se sitúa Euclides, quien legó a la posteridad una prolífica obra de síntesis de los conocimientos de su tiempo que afortunadamente se conservó casi íntegra y se convirtió en un referente casi indispensable hasta la Edad Contemporánea. La idea de Arquímedes está reflejada en una de las proposiciones iniciales de su obra Sobre los cuerpos flotantes, pionera de la hidrostática, que sería estudiada cuidadosamente por los fundadores de la ciencia moderna, entre ellos Galileo" (http://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/arquimedes.htm).

(10) **Leonardo da Vinci**: "Considerado el paradigma del *homo universalis*, del sabio renacentista versado en todos los ámbitos del conocimiento humano, Leonardo da Vinci (1452-1519) incursionó en campos tan variados como la aerodinámica, la hidráulica, la anatomía, la botánica, la pintura, la escultura y la arquitectura, entre otros. Sus investigaciones científicas fueron, en gran medida, olvidadas y minusvaloradas por sus contemporáneos; su producción pictórica, en cambio, fue de inmediato reconocida como la de un maestro capaz de materializar el ideal de belleza en obras de turbadora sugestión y delicada poesía" (http://www.biografiasyvidas.com/monografia/leonardo/).

(11) "**Galileo Galilei**: "Pisa, Toscana; 15 de febrero de 1564-Arcetri, Toscana; 8 de enero de 1642) fue un astrónomo, filósofo, ingeniero, matemático y físico italiano, relacionado estrechamente con la revolución científica. Eminente hombre del Renacimiento, mostró interés por casi todas las ciencias y artes (música, literatura, pintura). Sus logros incluyen la mejora del telescopio, gran variedad de observaciones astronómicas, la primera ley del movimiento y un apoyo determinante a la Revolución de Copérnico. Ha sido considerado como el padre de la astronomía moderna, el padre de la Física moderna y el padre de la ciencia. En el campo de la Física, Galileo formuló las primeras leyes sobre el movimiento; en el de la astronomía, confirmó la teoría copernicana con sus observaciones telescópicas. Pero ninguna de estas valiosas aportaciones tendría tan trascendentales consecuencias como la introducción de la metodología experimental, logro que le ha valido la consideración de padre de la ciencia moderna" (http://www.biografiasyvidas.com/monografia/galileo/).

(12) **Torricelli**: "Faenza, actual Italia, 1608-Florencia, 1647) Físico y matemático italiano. Se atribuye a Evangelista Torricelli la invención del barómetro. Asimismo, sus aportaciones a la geometría fueron determinantes en el desarrollo del cálculo integral" (http://www.biografiasyvidas.com/biografia/t/torricelli.htm).

(13) **Blaise o Blas Pascal**: "Pronunciación en francés: /blɛz paskal/; Clermont-Ferrand, 19 de junio 1623-París, 19 de agosto de 1662) fue un polímata, matemático, físico, filósofo cristiano y escritor francés. Sus contribuciones a la matemática y a la historia natural incluyen el diseño y construcción de calculadoras mecánicas, aportes a la teoría de la probabilidad, investigaciones sobre los fluidos y la aclaración de conceptos tales como la presión y el vacío" (https://es.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal).

(14) **Newton**: "La revolución científica iniciada en el Renacimiento por Copérnico y continuada en el siglo XVII por Galileo y Kepler tuvo su culminación en la obra del científico británico Isaac Newton (1642-1727), a quien no cabe juzgar sino como uno de los más grandes genios de la historia de la ciencia. Sin olvidar sus importantes aportaciones a las matemáticas, la astronomía y la óptica, lo más brillante de su contribución pertenece al campo de la Física, hasta el punto de que Física clásica y Física newtoniana son hoy expresiones sinónimas" (http://www.biografiasyvidas.com/monografia/newton/).

mientos sobre las leyes del movimiento de los cuerpos Albert Einstein[15] (1879-1955, creador de la teoría de la relatividad: punto de partida de la Física moderna. Ellos son, entre los más notables, los que dieron impulso y jugaron un papel decisivo en el desarrollo de la Física, como ciencia indiscutible capaz de poder explicar los más variados fenómenos que se desarrollan en el ámbito de la naturaleza.

(15) **Albert Einstein**: Nació en la ciudad bávara de Ulm el 14 de marzo de 1879. "En el siglo XVII, la sencillez y elegancia con que Isaac Newton había logrado explicar las leyes que rigen el movimiento de los cuerpos y el de los astros, unificando la Física terrestre y la celeste, deslumbró hasta tal punto a sus contemporáneos que llegó a considerarse completada la mecánica. A finales del siglo XIX, sin embargo, era ya insoslayable la relevancia de algunos fenómenos que la Física clásica no podía explicar. Correspondió a Albert Einstein superar tales carencias con la creación de un nuevo paradigma: la teoría de la relatividad, punto de partida de la Física moderna" (http://www.biografiasyvidas.com/monografia/einstein/).

CAPÍTULO I. LAS MEDICIONES Y SISTEMAS DE UNIDADES. INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN

Ing. Marcelo Nelson Navarro Ojeda, PhD.
Ing. Mario Adelfo Batista Zaldívar, PhD.

Sin matemáticas no hay nada que puedas hacer. Todo a tu alrededor en matemáticas. Todo a tu alrededor son números.

Shakuntala Davi

1.1. LAS MEDICIONES. MAGNITUD FÍSICA. INCERTIDUMBRE EN LAS MEDICIONES. PRECISIÓN Y EXACTITUD

1.1.1. Generalidades acerca de las mediciones

La Física, al igual que la Química, constituye una ciencia experimental. Se consideran ciencias experimentales aquellas que deben y pueden someter sus afirmaciones o enunciados al juicio de la experimentación. "En un sentido científico, la experimentación hace alusión a una observación controlada; en otros términos, experimentar es reproducir en el laboratorio el fenómeno en estudio con la posibilidad de variar a voluntad y de forma precisa las condiciones de observación" [16]. La experimentación, por su esencia, juega un doble papel en la búsqueda del conocimiento: es juez y guía del trabajo científico; y para poder hacerlo, se apoya en la realización de medidas, las cuales facilitan la descripción y la mejor comprensión de los fenómenos cuantitativamente. Entonces, podemos afirmar, sin lugar a dudas, que la medición, el acto de medir, en la experimentación, constituye una operación imprescindible en las ciencias experimentales y en las muy disímiles situaciones de la vida cotidiana.

Por todo ello podemos afirmar que las mediciones constituyen un soporte fundamental para poder realizar las muy variadas operaciones de intercambios, procesos, constatación de resultados, etc., en la vida de la sociedad. Imprescindibles resultan en las esferas de las ciencias naturales, sociales, exactas y humanas; en la técnica y la tecnología donde poseen un vasto campo, con amplia repercusión en la producción, los servicios y las investigaciones. Y por ello el hombre ha precisado utilizar diferentes sistemas de medidas, hasta llegar hoy al Sistema Internacional de Unidades (SI).

Si reflexionamos sobre el trabajo científico, en múltiples ocasiones se requiere realizar experimentos, se precisa de la toma de datos y medición de resultados; y en este contexto las mediciones deben ser precisas, repetibles y confiables; no debe mediar la subjetividad, que conduce a graves errores. No podemos olvidar que “el hombre ve hasta donde conoce”; entonces, en ocasiones, el resultado de las mediciones, depende de cómo el observador ve o “quiera ver el objeto” que está midiendo. Por ello, las mismas se deben llevar a cabo con toda rigurosidad, con instrumentos calibrados que alejen toda subjetividad, aunque siempre hay un margen de error posible: errores humanos e instrumentales.

Pero, ante todo, debemos tener en cuenta que la Física es una ciencia muy conceptual; y es a través de los conceptos, devenidos estos de la experimentación (que ha posibilitado el logro de los diferentes modelos matemáticos) que se alcanza el binomio concepto-modelo matemático, lo que ha permitido dar explicación a múltiples situaciones y fenómenos dentro del campo de la Física.

1.1.2. Definición de magnitud, medición y unidad de medición

Uno de los primeros conceptos desarrollados por el hombre, desde sus inicios, fue el de número,[1.1] pues tenía la necesidad de poder expresar a través de

(1.1) Número: del latín “numĕrus”, el término número se refiere a la expresión de una cantidad con relación a su unidad (https://definicion.de/numeros/). Un número, en ciencia, es una abstracción que denota una cantidad elementos contables todo lo que se encontraba a su alrededor. Entonces el hombre comenzó a medir mediante un simple conteo de objetos, que lógicamente eran de diferente índole. Más tarde, y compulsado por sus propias necesidades y desarrollo, concibió y enunció el concepto de medida, realizando las primeras mediciones a partir de unidades muy rudimentarias (el pie, el palmo, el brazo, etc., que se convirtieron por antonomasia y lógica consecuencia en los primeros patrones naturales de medición) [17].

En muchas ocasiones se observa cómo se utilizan dos términos, que si bien están íntimamente relacionados, cada uno posee su propia acepción. Y estamos hablando de los términos: *magnitud física* y su *dimensión*. E, indistintamente, se nombra a la dimensión "magnitud", cuando se refieren a que tal objeto posee una magnitud, por ejemplo, de 8 cm; o que un segundo objeto posee una magnitud mayor, al duplicar la cantidad del primero. Evidentemente, se están utilizando dos conceptos, como uno. Y, en algunas publicaciones, se utiliza el término *número de medida* (dimensión) de una magnitud física, como la propia magnitud física; ya se esté hablando de masa, temperatura, viscosidad, tiempo, velocidad, etc.

Veamos a continuación cómo es definido el importante término **magnitud**:

"Atributo de un fenómeno, cuerpo o sustancia que puede ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente." [18]. O, en otras palabras: una cualidad o propiedad de un cuerpo, sistema o fenómeno que puede ser medida: la temperatura de un cuerpo o sistema puede ser medida. Es una definición muy sucinta —breve, concisa, precisa—, que la define como una propiedad que puede ser medida.

"Aquella propiedad de los sistemas físicos susceptible de ser medida" [19] (obsérvese como se está refiriendo a una propiedad física). "El término magnitud puede referirse a: la magnitud física, aquella propiedad de un cuerpo, sustancia o fenómeno físico susceptible de ser distinguido(a) cualitativamente y determinada cuantitativamente (Vocabulario Internacional de Metrología); la magnitud matemática, una propiedad matemática relacionada con el tamaño" [19] (aquí se hace una clara diferenciación entre *magnitud física* y la *magnitud matemática*; mientras

o una magnitud. En matemáticas, un número puede representar una cantidad métrica o más generalmente un elemento de un sistema numérico o un número ordinal que posibilita dar una posición dentro de un orden de una serie determinada (https://es.scribd.com/document/272863741/Un-numero).

la primera es una propiedad de un cuerpo, sistema o fenómeno físico —intensidad luminosa o de calor, tamaño, consistencia, etc.—, la segunda la relaciona directamente con el tamaño, con la dimensión).

Pero, no dejemos esta fuente y continuemos con otras acepciones: "Del lat. *magnitudo*; sust. f. 1. El tamaño de cualquier cosa" (se está refiriendo a su *dimensión*); pero ya, en lo referente a la Física, plantea: "[Física] Propiedad que puede ser cuantificada: el peso y la velocidad son dos magnitudes […] [Física] Magnitud: Todo aquello que es susceptible de sufrir una variación, aumentando o disminuyendo, y además, puede ser medido (sin lugar a dudas, define el vocablo "magnitud" dirigido a la "propiedad física", y no a su tamaño).

"Al poder ser determinadas cuantitativamente, se pueden comparar magnitudes con una *unidad de medida* del mismo género" [19] (es decir, que está relacionando la medición de una determinada magnitud física con su unidad de medida; que pudiera coincidir con su unidad patrón: por ejemplo, en longitud, el metro, o múltiplos y submúltiplos de esta: kilometro, centímetro, respectivamente). "Entonces, la magnitud quedaría determinada por el producto de un número de medida por la unidad" [19] (o lo que es lo mismo, que tal magnitud física, contiene "n veces" a su *unidad de medida*). "En Física, se toman como magnitudes fundamentales aquellas cuyas unidades son de fácil construcción y empleo, y el resto se denominan magnitudes derivadas" [19].

La fuente *DeCoceptos.com* nos da las siguientes definiciones: "En sentido amplio, cuando hablamos de magnitud, nos referimos al tamaño de un cuerpo o a la gravedad o importancia de un hecho" [20] (se está refiriendo al número de medida del cuerpo, a su dimensión). No obstante, cuando hace un aparte para referirse a las magnitudes físicas, plantea: "En Física, es la propiedad de los cuerpos pasible de medición. Ellas son, entre otras, la altura, la superficie, el peso, el tiempo, la temperatura o la longitud. Se las cuantifica comparándolas con un patrón o modelo (unidad de medida)". Deja una clara definición de magnitud física, cuando se refiere a propiedades.

Pero, cuando plantea: "Las medimos cuando comparamos una magnitud con otra" [20]. Según nuestra opinión, las magnitudes no se pueden comparar unas con otras —en su medición—, cuando nos estamos refiriendo a propiedades físicas. Para medir, no podemos comparar, por ejemplo, la viscosidad con la temperatura de un cuerpo —si bien están íntimamente relacionadas—, cada una posee su propia unidad de medida.

Más adelante, esta misma fuente, deja bien diferenciado el término magnitud física, cuando plantea: "Las magnitudes físicas pueden ser escalares, como la masa, la energía, la densidad o la temperatura, que poseen valores fijos, independientes del observador, para la Física clásica. No poseen dirección ni sentido. Las vectoriales dependen del observador y poseen dirección y sentido, por ejemplo, la fuerza, la velocidad o la aceleración" [20].

Continuemos observando cómo existe coincidencia, en la mayoría de los autores, en la definición de *magnitud*: "Sustantivo femenino. Este vocabulario se refiere al tamaño, dimensión, capacidad o volumen de un cuerpo o una superficie. [...] la magnitud es un concepto abstracto que reúne las nociones de volumen, superficie, longitud, masa, material, peso, pluralidad, temperatura, velocidad, fuerza y amplitud angular; todas ellas son magnitudes y hacen referencia a las cualidades físicas de un objeto que pueden ser medidas. A cada caso concreto de medición de una de las cualidades, se denomina cantidad [...] Las magnitudes sirven para identificar un tipo de cualidad física de un objeto y compararla con la de otros objetos" [21]. Como se puede constatar, deja bien claro el concepto magnitud, al relacionarlo a la propiedad de un cuerpo.

La fuente *Definiciones de Magnitud, Medir y Unidad de Medida* plantea lo siguiente: "Una magnitud física es un número o conjunto de números, resultado de una medición cuantitativa que asigna valores numéricos a algunas propiedades de un cuerpo o sistema físico, como la longitud o el área" [22]. Primeramente, cuando inicia la conceptualización de magnitud física la define, como "un número o conjunto de números", lo que nos da la idea de *cantidad*, y no de una propiedad; no obstante, más adelante puntualiza: "Las magnitudes físicas pueden cuantificarse por comparación con un patrón o con partes de un patrón. Constituyen ejemplos de magnitudes físicas la masa, la longitud, el tiempo, la carga eléctrica, la densidad, la temperatura, la velocidad, la aceleración, y la energía... En términos generales, es toda la propiedad de los cuerpos que puede ser medida" [22]; todo lo cual no deja lugar a dudas que se refiere a una *propiedad* del objeto, sistema o fenómeno, y no a su dimensión.

Finalmente, la fuente *FÍSICA: Las ciencias físicas y la medida: Magnitudes y medida* sintetiza claramente todo lo analizado anteriormente, cuando plantea: "La noción de magnitud está inevitablemente relacionada con la de medida. Se denominan magnitudes a ciertas propiedades o aspectos observables de un sistema físico que pueden ser expresados en forma numérica. En otros términos, *las* *magnitudes son propiedades o atributos medibles*. La longitud, la masa, el volumen, la fuerza, la velocidad, la cantidad de sustancia, son ejemplos de *magnitudes físicas*" [23]. Teniendo en cuenta tal aseveración, podemos afirmar que, cuando estamos hablando de *cantidad*, nos estamos refiriendo al *valor* o dimensión que toma o posee una determinada *magnitud* de un cuerpo o sistema concreto.

Para una magnitud física concreta, se pueden utilizar numerosas unidades diferentes; p. ej., la velocidad "v" de una partícula, cuerpo o sistema puede expresarse de la forma siguiente: v = 25 m/s = 90 km/h, donde metro/segundo y kilómetro/hora son unidades alternativas para expresar el mismo valor de la magnitud velocidad [24].

En resumen, se llama *magnitud* a la *propiedad física* que es medida, mientras que *cantidad* se refiere al *valor numérico* que posee tal magnitud, como resultado de una medición. Según el Sistema Internacional de Unidades (SI) se clasifican en: *magnitudes básicas o fundamentales y magnitudes derivadas* [23, 25, 26].

En resumen:

Magnitud física: atributo de un fenómeno, de un cuerpo o sustancia, que puede ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente: cualidad o propiedad de un cuerpo, sistema o fenómeno, que puede ser medida (cuantificarse por comparación utilizando un patrón, y/o submúltiplos o múltiplos de este); por ejemplo, respecto a un cuerpo o sistema, pueden ser magnitudes escalares: la masa, temperatura, densidad o volumen; o magnitudes vectoriales: la velocidad o su aceleración.

Dimensión: tamaño de una determinada magnitud física.

¿Qué es la medición?

Entonces, ahora resulta mucho más fácil definir el término *medición*. Podríamos definir la *medición*, como aquel acto de comparar una magnitud desconocida con una unidad de *medida patrón*(1.2). De esta forma, podemos determinar cuántas veces el patrón está contenido en la referida magnitud que se desea medir. De tal forma, es posible medir magnitudes físicas tanto escalares como vectoriales, tales como: longitudes, áreas, volúmenes, cantidad de masa, fuerzas, velocidades, aceleraciones, campos de fuerzas, potencial y carga eléctrica, rapidez, presión, densidad de corriente o de masa, viscosidad, temperatura, etc. [16, 27-30].

Respecto al término *medición*, existe casi una plena coincidencia en la definición que dan los diferentes autores; así por ejemplo tenemos que: "La **medición** es un proceso básico de la ciencia que consiste en comparar un patrón seleccionado con el objeto o fenómeno cuya magnitud física se desea medir para ver cuántas veces el patrón está contenido en esa magnitud" [31].

"Una medición es el resultado de la acción de medir. Este verbo, con origen en el término latino *metiri*, se refiere a la comparación que se establece entre una cierta cantidad y su correspondiente unidad para determinar cuántas veces dicha unidad se encuentra contenida en la cantidad en cuestión" [32].

"La medida de una magnitud física supone, en último extremo, la comparación del objeto que encarna dicha propiedad con otro de la misma naturaleza que se toma como referencia y que constituye el *patrón*" [1].

De todo lo anterior, se deriva otro importante concepto: *unidad de medida*. La unidad de medida la podemos establecer nosotros mismos. No obstante, ya desde la antigua Grecia, podemos encontrar sistemas de medidas estructurados. Por tan solo citar unos pocos ejemplos, encontramos las siguientes unidades de medición empleadas en las magnitudes físicas: longitud, área, volumen y peso

(1.2) **Patrón de medida**: "Un patrón de medidas es el hecho aislado y conocido que sirve como fundamento para crear una unidad de medida". "Muchas unidades tienen patrones, pero en el sistema métrico solo las unidades básicas tienen patrones de medidas. Los patrones nunca varían su valor. Aunque han ido evolucionando, porque los anteriores establecidos fueron variables. Ejemplo de un patrón de medida sería: 'Patrón del segundo: es la duración de 9 192 631 770 períodos de radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de Cesio 133'. Como se puede leer en el artículo sobre el segundo invariables" (http://cienciasdos.es.tl/Patr%F3n-de-medida.htm).

Longitud:

Unidades derivadas del dedo (“*dáctilos*”): daktylos (0,022 m), kondylos (0,04 m), palame (0,08 m), etc.

Unidades mayores, múltiplos del pie (“*pous*”): pous (296 mm), haploun bēma (0,08), orgyia (1,92 m), plétron (32,00 m).

Largas distancias, múltiplos del estadio (“*stadium*”): stadium (174,125 m), diaulo (384,54 m), schoinos (6300 m).

Área:

Mayores que 1 metro cuadrado: bema (2,56 m^2), akaina (10,24 m^2), gyges (5,12 m^2).

Volumen:

Medidas secas: hemikotylion (0,137 m^3), cotila (0,274 m^3), medimno (52,608 m^3).

Medidas líquidas: listron (0,0114 L), mystron (0,0228 L), dichoron (26,266 L).

Peso: ébolo (1,05 g), dragma (6,3 g), talento (37,8 kg).

En resumen:

Medición: acto de comparar una *magnitud física escalar o vectorial desconocida*, de un objeto, sistema o fenómeno, con una *unidad de medida o patrón*.

Unidad de medida: valor asignado a un patrón de medición.

Medida: valor alcanzado por la magnitud física de un objeto, sistema o fenómeno mediante el acto de su medición.

"Las primeras mediciones realizadas estuvieron relacionadas con la masa, la longitud y el tiempo, y posteriormente las de volumen y ángulo como una necesidad debido a las primeras construcciones realizadas por el hombre" [17].

El acto de medir una determina magnitud entraña, en muchas ocasiones, tener en cuenta, no solo su valor numérico, sino otros atributos de esa magnitud. Por ello, en la Física, quedan perfectamente definidos dos nuevos términos: las *magnitudes escalares*(1.3) y las *magnitudes vectoriales*(1.4).

Cuando estamos hablando de magnitudes, tales como la masa, la longitud, el peso específico, la capacidad calórica, el calor específico, la energía, el trabajo, la cantidad de calor, la temperatura, el volumen, el calor latente de fusión o vaporización, el tiempo, etc., nos estamos refiriendo a magnitudes escalares; es decir, cuando expresan una cantidad mediante un número real seguido de la unidad correspondiente.

Y, en este contexto, es imprescindible aclarar un aspecto importante. Hemos escuchado, en diversas ocasiones tratar, p. ej., al *coeficiente*(1.5) de fricción, magnitud adimensional, como una magnitud escalar, dentro del campo de la Física. ¿Constituye realmente el coeficiente de fricción una magnitud física escalar? Veamos:

Ya en párrafos anteriores quedó claro el concepto de *magnitud física*: "Es un valor asociado a una propiedad física o cualidad medible de un sistema físico, es decir, a la que se le pueden asignar distintos valores como resultado de una medi-

(1.3) **Magnitudes escalares:** "Son aquellas que quedan totalmente determinadas dando un solo número real y una unidad de medida. Ejemplos de este tipo de magnitud son la longitud de un hilo, la masa de un cuerpo o el tiempo transcurrido entre dos sucesos. Se las puede representar mediante segmentos tomados sobre una recta a partir de un origen y de longitud igual al número real que indica su medida".

Fuente: http://materias.fi.uba.ar/6201/MosqVectoresacr.pdf

(1.4) **Magnitud vectorial**: "A las magnitudes vectoriales no se las puede determinar completamente mediante un número real y una unidad de medida. Por ejemplo, para dar la velocidad de un móvil en un punto del espacio, además de su intensidad se debe indicar la dirección del movimiento (dada por la recta tangente a la trayectoria en cada punto) y el sentido de movimiento en esa dirección (dado por las dos posibles orientaciones de la recta) (http://materias.fi.uba.ar/6201/MosqVectoresacr.pdf).

(1.5) **Coeficiente**: "En Física, el coeficiente es un valor numérico que indica el grado o la intensidad de cierta propiedad o característica, sea esta de un cuerpo o de un fenómeno [...] En Matemáticas, por ejemplo, coeficiente es un factor multiplicativo, es decir, el número constante que se encuentra a la izquierda de una variable o incógnita y la multiplica" (https://www.significados.com/coeficiente/).

ción o una relación de medidas. Las magnitudes físicas se miden usando un patrón que tenga bien definida esa magnitud, y tomando como unidad la cantidad de esa propiedad que posea el objeto patrón" [33]. Es decir que: "Una magnitud física se expresa como el producto de un valor numérico y una unidad de medida, no únicamente un solo número" [34].

Entonces, se puede afirmar que más que una *magnitud física*, el coeficiente de fricción es una *magnitud adimensional*: "En física, química, ingeniería y otras ciencias aplicadas se denomina magnitud adimensional a toda aquella magnitud que carece de una magnitud física asociada. Así, serían magnitudes adimensionales todas aquellas que no tienen unidades, o cuyas unidades pueden expresarse como relaciones matemáticas puras" [35].

Ahora veamos qué es una **magnitud vectorial**.

Existen otras magnitudes físicas que no es suficiente expresarlas con un simple número real; sino que necesitan de otros atributos en su definición. Un ejemplo de lo antes dicho es la velocidad con que se desplaza un determinado cuerpo —aquí no solo basta con conocer su intensidad, su rapidez (valor modular), sino que se precisa conocer además su *dirección* y *sentido*, para poder determinar el movimiento de dicho cuerpo [25-28, 34, 36, 37]. Posteriormente, en el capítulo III: *Física vectorial*, será tratado más ampliamente este tópico.

1.1.3. Incertidumbre en las mediciones. Precisión y exactitud

Incertidumbre en las mediciones

Podemos afirmar que toda medición tiene cierto grado de incertidumbre estadística; y, puntualizábamos anteriormente, que la aparición de los errores, durante el acto de medir, se debía fundamentalmente a los errores humanos y de calibración de los instrumentos. Aunque, también es importante, en muchas circunstancias, tener en cuenta los requerimientos medioambientales durante la ejecución de esta.

"La incertidumbre también se llama error, porque indica la máxima diferencia probable entre el valor medido y el real. La incertidumbre o el error de un valor medido depende de la técnica empleada" [30].

"Es el parámetro asociado con el resultado de una medición, que caracteriza la dispersión de los valores que podrían ser razonablemente atribuidos al valor a medir. El valor de incertidumbre incluye componentes procedentes de efectos sistemáticos en las mediciones, debido a componentes que se calculan a partir de distribuciones estadísticas de los valores que proceden de una serie de mediciones y valores que se calculan a partir de funciones de densidades de probabilidad basadas en la experiencia u otra información" [38].

La comunidad internacional no reporta fórmulas exactas para determinar la incertidumbre de las mediciones; es por esta razón por que se maneja el término "estimación de la incertidumbre" en lugar de "cálculo de incertidumbre", pues es necesario emplear el criterio del metrólogo para identificar y evaluar los factores de influencia.(1.6)

Bastaría con citar el siguiente ejemplo para constatar el fenómeno de la incertidumbre en las mediciones; veamos: "Las mediciones siempre tienen incertidumbre. Si medimos el espesor de la portada de este libro con una regla común, la medición solo será confiable al milímetro más cercano, y el resultado será de 1 mm. Sería erróneo dar este resultado como 1,00 mm; dadas las limitaciones del instrumento de medición, no se sabría si el espesor real es de 1,00 mm o 0,85 mm. Pero si se usa un micrómetro, que mide distancias de forma confiable al 0,01 mm más cercano, el resultado será 0,75 mm. La distinción entre estas dos mediciones radica en su incertidumbre. La medida con micrómetro tiene menor incertidumbre y es más exacta" [30].

Esta misma fuente, cuando se refiere al concepto de *exactitud* de un valor medido lo puntualiza de la siguiente manera con estos dos ejemplos:

"A menudo indicamos la exactitud de un valor medido (es decir, qué tanto creemos que se acerca al valor real) escribiendo el número, el símbolo y un segundo número que indica la incertidumbre de la medición. Si el diámetro de una varilla de acero se da como 56,47 ± 0,02 mm, esto implica que es poco probable que el valor real sea menor que 56,45 mm o mayor que 56,49 mm" [30].

(1.6) "La comunidad internacional ha establecido un consenso sobre la metodología preferida para cuantificar y combinar los factores de influencia, de tal manera que los resultados de las mediciones puedan ser reportados de una manera que sea interpretada uniformemente por todos los usuarios. Este consenso internacional se plasmó en el documento "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement,"(conocida como la "GUM") publicado por la ISO" (https://www.cenam.mx/publicaciones/gratuitas/descarga/simposio%202002/doctos/sp001.pdf).

"También podemos expresar la exactitud en términos del error fraccionario o error de aproximación máximo probable (también llamados incertidumbre fraccionaria o porcentaje de incertidumbre) [...] En el caso del diámetro de la varilla antes citada, el error fraccionario es de (0,02 mm)/(56,47 mm), que es aproximadamente 0.0004, el error de aproximación es de (0,0004) (100 %), o bien, de 0,04%" [30].

Resulta conveniente también puntualizar que, cuando se usan números con incertidumbre para calcular otros números, el resultado, ya sea de una suma, resta, multiplicación o división, también es incierto.(1.7)

Para alejar lo más posible los errores en las mediciones, estas deben llevarse a cabo de forma precisa y con la mayor exactitud, dentro de los requerimientos planteados. Pero, existe una muy generalizada confusión en la concepción y definición de estos dos importantes términos. En muchas ocasiones se está hablando de precisión durante una medición, cuando en realidad se están refiriendo a la exactitud.

Entonces, **¿qué se entiende por precisión y exactitud?**

Los términos precisión y exactitud suelen ser confundidos en múltiples situaciones, lo mismo durante las mediciones, como al momento de analizar los resultados de una calibración o especificaciones de un instrumento.

Ambos términos tienen una relación directa con el instrumento de medición, pero de forma bien distinta. Veamos:

Precisión: "Es la proximidad entre las indicaciones o los valores medidos obtenidos en mediciones repetidas de un mismo objeto, bajo condiciones especificadas. La precisión se puede expresar numéricamente mediante medidas de dispersión tales como desviación típica, variancia o el coeficiente de variación bajo las condiciones especificadas. La precisión, se utiliza para definir a la repetibilidad de medida" [38].

Es decir, *precisión* es la capacidad que posee un instrumento de dar, reflejar, permitir, el mismo resultado en mediciones diferentes realizadas, o llevadas a

(1.7) Cuando se usan números con incertidumbre para calcular otros números, el resultado también es incierto. Por ejemplo, dados los números: 123,62 y 18,9; aunque 123,62 tiene una incertidumbre aproximada de 0,01, la de 8,9 sería de 0,1; así que la suma debe tener esta misma incertidumbre: 0,1 y escribirse como 132,5, no 132,52 (http://es.slideshare.net/jdbg16/física-universitaria-vol-112a-edicionsears-zemansky-young-freedman).

cabo, en las mismas condiciones. Y cuando se está hablando de las mismas condiciones, nos estamos refiriendo a tres factores fundamentales: el recurso humano, la calibración del equipo y las mismas o muy semejantes condiciones medioambientales (no se debe olvidar que tanto el objeto que se va a medir, como el instrumento están sujetos a determinados factores: presión, temperatura, etc. que, si varían de una medición a otra, pueden ocurrir pequeñas desviaciones del valor real que se debe obtener).

Exactitud: se refiere a cuán cerca del valor real se encuentra el valor medido. Si el instrumento cuenta con escalas, cada vez más pequeñas: subdivisiones dentro de las divisiones existentes, por ejemplo, siguiendo una derivación decádica: divisiones de 10 en 10, entonces se obtendrán mediciones más exactas, por ejemplo, con exactitud de un metro, de un decímetro, de un centímetro, de un milímetro, de un micrómetro, etc., es evidente que la exactitud de la medición aumenta con la exactitud del instrumento, y por ende la medición realizada depende directamente de la mayor posibilidad de subdividir la unidad patrón.

Según la fuente [38]: "Se define así a la proximidad entre el valor medido y el valor verdadero de una magnitud a medir. La 'exactitud en la medida' no es una magnitud y no se expresa numéricamente. Se dice que una medición es más exacta cuanto más pequeño es el error de la medición".

En resumen:

Precisión: es la capacidad que posee un instrumento de dar, reflejar, permitir, el mismo resultado en mediciones diferentes realizadas, o llevadas a cabo, en las mismas condiciones, con un instrumento perfectamente calibrado.

Exactitud: se refiere a cuán cerca del valor real se encuentra el valor medido. A medida que la escala del instrumento de medición, vaya presentando subdivisiones más pequeñas, en cada unidad precedente el resultado de las mediciones será más exacto, con un instrumento perfectamente calibrado.

Por último, quisiéramos puntualizar, que tanto la precisión como la exactitud, que se desean de una determinada medición, dependen directamente de los requerimientos de la misma; por tal motivo se ha creado una amplísima gama de instrumentos de medición, para las más diversas prestaciones.

1.2. SISTEMAS DE MEDIDAS

A lo largo de la historia, con la aparición de las diferentes civilizaciones, el hombre ha venido utilizando diversos tipos de sistemas de unidades:[(1.8)] "Los cuales están íntimamente relacionados con la condición histórica de los pueblos que las crearon, las adaptaron o las impusieron a otras culturas. Su permanencia y extensión en el tiempo lógicamente también ha quedado ligada al destino de esos pueblos y a la aparición de otros sistemas más coherentes y generalizados" [39].

El sistema anglosajón de medidas —sistema inglés—, utiliza aun hoy día el pie, la libra, la milla y los Grados Fahrenheit, lo cual constituye un ejemplo evidente de sistema de unidades en recesión. Otros sistemas son el cegesimal, el MKS y el Sistema Métrico Decimal (base del Sistema Internacional de Unidades).

(1.8) **Sistemas de Unidades: I. Sistema Métrico Decimal**: el primer sistema de unidades bien definido que hubo en el mundo fue el Sistema Métrico Decimal, implantado en 1795 como resultado de la Convención Mundial de Ciencia celebrada en París, Francia. Este sistema tiene una división decimal y sus unidades fundamentales son: el METRO, el KILOGRAMO-PESO y el LITRO. **II. Sistema MKS:** tiene su origen en 1902 de la mano del ingeniero italiano Giovani Giorgi siendo adoptado por la Comisión Electrotécnica Internacional en París en el año 1935. Este sistema también recibe el nombre de MKS, cuyas iniciales corresponden al METRO, al KILOGRAMO y al SEGUNDO como unidades de longitud, masa y tiempo respectivamente. **III. Sistema Usual en Estados Unidos (SUEU)**: se basa en el sistema inglés, y es muy familiar para todos en Estados Unidos. Usa el PIE como unidad de longitud, la LIBRA como unidad de peso o fuerza, y el SEGUNDO como unidad de tiempo. En la actualidad, el SUEU está siendo sustituido rápidamente por el sistema internacional, en la ciencia, la tecnología, y en algunos deportes. **IV. Sistema Internacional de Unidades**: debido a que en el mundo científico se buscaba un solo sistema de unidades que resultará práctico, claro y de acuerdo con los avances de la ciencia. En 1997, científicos y técnicos de todo el mundo se reunieron en Ginebra, Suiza, y acordaron adoptar definitivamente el llamado Sistema Internacional de Unidades (SI). Este sistema se basa en el llamado MKS cuyas iniciales corresponden a metro, kilogramo y segundo (https://es.wikibooks.org/wiki/F%C3%ADsica/Unidades_y_medidas).

1.2.1. Sistema Internacional de Unidades. Unidades básicas. Unidades derivadas. Símbolos dimensionales y análisis dimensional

El Sistema Internacional de Unidades (denominado SI) es usado por casi la totalidad de los países del mundo, a excepción de tres que, en su legislación, no lo han adoptado: Birmania, Liberia y Estados Unidos. Este sistema fue generado a partir del antiguo Sistema Métrico Decimal y por ello también se conoce como Sistema Métrico. Se instauró en 1960 en la XI Conferencia General de Pesas y Medidas —en francés Conférence générale des poids et mesures—, llevada a cabo en la ciudad de Sèvres, París. En esta IX Conferencia, fueron reconocidas seis unidades físicas básicas. Más tarde, en 1971, se añadió una séptima unidad.

Sería oportuno puntualizar que las unidades se escriben con letras minúsculas —por ejemplo: kilogramo (kg), segundo (s)—. En el caso de que las unidades hagan alusión a nombres propios, se simbolizan con mayúsculas p. ej.: la unidad derivada pascal se simboliza Pa, el newton por N, etc.

También es bueno destacar la forma de realizar la notación de ciertas operaciones aritméticas, en el uso de las unidades. En el caso de la multiplicación se lee "de corrido". Veamos en los ejemplos que aparecen a continuación, cómo se realiza la lectura:

N.m, se lee: newton metro

kg.s, se lee: kilogramo segundo

kg.m, se lee: kilogramo metro

N.m, se lee: newton metro

A.J, se lee: ampere joule

Ahora bien, si se tratara de una división, vamos a utilizar la palabra "por". Veamos cómo se lee en los siguientes ejemplos de división de magnitudes y división de unidades:

Tabla 1.1. Ejemplos de cómo realizar la lectura cuando existen cocientes de magnitudes físicas y/o unidades.

Magnitud física	Fórmula	Se lee:	Unidades	Se lee:
Presión	$\frac{\text{fuerza}}{\text{área}}$	fuerza por unidad de área	$\frac{N}{m^2}$	newton por metro cuadrado
Potencia	$\frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}}$	trabajo por unidad de tiempo	$\frac{J}{s}$	joule por segundo
Densidad	$\frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$	masa por unidad de volumen	$\frac{kg}{m^3}$	kilogramo por metro cúbico

Antes de continuar este importante tema, se hace indispensable puntualizar determinados conceptos, lo cual evitará confusiones innecesarias a la hora de utilizar los sistemas de unidades. Y, en este contexto, cabe hacerse la siguiente pregunta:

¿Cuál es la diferencia conceptual entre magnitud y dimensión en el campo de la Física?

En la literatura, en múltiples ocasiones, se manejan los términos magnitud y dimensión como una misma cosa, como sinónimos, pero realmente no es así; no obstante haber sido tratado ya este aspecto anteriormente, no resulta obvio puntualizar estos dos importantes términos:

Magnitud: es una propiedad física medible en un determinado sistema físico (que se encuentra ubicado en el espacio-tiempo, que posee un estado físico y que se le puede asociar una magnitud física llamada energía). O dicho en otras palabras, es aquella propiedad susceptible a ser medida; que se le asigna un valor producto de una medición, utilizando para ello un patrón de referencia asociado a esa magnitud.

Dimensión: es un número que caracteriza cuantitativamente a una magnitud física: su medida. Si estamos trabajando con la magnitud física longitud, pues entonces podríamos decir que un determinado objeto tiene una dimensión: longitud de 7 m. En Geometría, Física y las Ciencias Aplicadas, este concepto viene asociado al número mínimo de coordenadas para poder especificar cualquier punto perteneciente a esa magnitud. Entonces, podríamos decir que una línea posee una dimensión, pues solo necesitamos una coordenada para especificar un punto de la misma; mientras que, en las magnitudes superficiales y tridimensionales, necesitamos de dos y/o tres coordenadas para determinar un punto en el plano o el espacio, respectivamente. De lo cual se infiere que estaremos trabajando con una, dos o tres dimensiones, según sea el caso; o dicho de otra forma: con una dos o tres coordenadas para determinar la posición que ocupa un punto en una recta, plano o espacio. También podríamos hablar de una cuarta dimensión: el tiempo, el cual es unidireccional.

No obstante a lo afirmado anteriormente, en las ciencias físicas e ingenierías, podemos caracterizar el vocablo "dimensión" como el tamaño (cantidad) de una determinada magnitud física, el cual estaría asociado a unidades de medidas: unidades básicas o derivadas. En el Sistema Internacional de Unidades (SI), las dimensiones de un objeto o sistema vienen dadas por las siete magnitudes físicas fundamentales; de esta forma, se pueden conocer la longitud, la superficie o el volumen de un cuerpo; la temperatura, densidad y/o viscosidad que presenta un fluido (líquido o gas); la intensidad de corriente; la cantidad de calor o energía que posee un cuerpo; o la cantidad de trabajo realizado en un determinado sistema físico, etc.

1.2.2. Magnitudes y unidades básicas o fundamentales del SI

Como se dijo anteriormente, este sistema consta actualmente de siete unidades básicas o fundamentales (se caracterizan por ser elementales, es decir, que no se pueden descomponer en unidades más simples, siendo independientes entre sí); expresan magnitudes físicas de amplio uso, sustentadas en las disposiciones: 10ª CGPM (1954, Resolución 6; CR, 80); 11ª CGPM (1960, Resolución 12; CR, 87); 13ª CGPM (1967/68, Resolución 3; CR, 104 y Metrología, 1968, 4, 43); 14ª CGPM (1971, Resolución 3; CR, 78 y Metrología, 1972, 8, 36) (40).

Para el resto de las magnitudes físicas, se utilizan unidades derivadas. En la tabla 1.2 aparecen las siete magnitudes físicas fundamentales,[1.9] la denominación

(1.9) **Unidades básicas:** si bien las siete magnitudes básicas: longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura termodinámica, cantidad de sustancia e intensidad luminosa, se consideran, por convenio, independientes, las unidades básicas: metro, kilogramo, segundo, amperio, kelvin, mol y candela, no lo son. Se puede observar que la definición del metro incluye al segundo; la del amperio al metro, al kilogramo y al segundo; la del mol al kilogramo y la definición de la candela incluye al metro, al kilogramo y al segundo (Sistema Internacional de Unidades: SI. https://www.cem.es/sites/default/files/siu8edes.pdf).

de las unidades básicas, así como los símbolos dimensionales y de sus unidades [24, 26, 41]. Para una mayor ilustración sobre este aspecto, ver el anexo 1.

Tabla 1.2. Magnitudes físicas fundamentales del SI

Magnitud física básica	**Símbolo utilizado en fórmulas**	**Símbolo dimensional**	**Nombre unidades SI básica**	**Símbolo de la unidad**
Longitud	l, x, r, etc.	L	metro	m
Masa	m	M	kilogramo	kg
Tiempo	t	T	segundo	s
Intensidad de corriente	I, i	I	amperio	A
Temperatura termodinámica	T	Θ	kelvin	K
Cantidad de sustancia	n	N	mol	mol
Intensidad luminosa	Iv	J	candela	cd

Observaciones: Información gráfica ver anexo II.

Fuente: [40, 41].

Estas magnitudes físicas fundamentales dan lugar al establecimiento de las magnitudes físicas y unidades derivadas. Por tanto, el sistema de unidades integralmente posee su base en estas.

1.2.3. Magnitudes físicas y unidades derivadas del SI

Naturalmente, las *unidades derivadas* son partes constituyentes del Sistema Internacional de Unidades, y se derivan de las siete unidades básicas (se definen a partir de operaciones entre magnitudes físicas). Estas unidades, que se tornan imprescindibles, no solamente son empleadas en el ámbito de la Física, sino que tienen un vastísimo uso en el campo de las ingenierías.

En la mecánica clásica, tres magnitudes físicas: longitud (L), masa (M) y tiempo (T) y otras pueden ser estructuradas a partir de estas tres; tales como: fuerza: kg.m/s2, velocidad: m/s, aceleración: m/s^2, área: m^2, volumen: m^3.

En las siguientes tablas —de la 1.3 a la 1.8— se ofrece una explícita información de estas unidades, sus símbolos y demás características. En las tablas 1.4 y 1.5 se dispuso de una penúltima columna correspondiente a las fórmulas dimensionales.

Tabla 1.3. Ejemplos de unidades SI derivadas coherentes expresadas a partir de las unidades básicas

Magnitud derivada	Nombre	Símbolo utilizado en fórmulas	Dimensión de la magnitud	Expresada en unidades básicas del SI
Área, superficie	metro cuadrado	A	L^2	m^2
Volumen	metro cúbico	V	L^3	m^3
Velocidad	metro po segundo	v	$L.T^1$	$m.s^{-1}$
Aceleración	metro por segundo cuadrado	a	$L.T^2$	$m.s^{-2}$
Densidad, masa en volumen	kilogramo por metro cúbico	ϱ	$M.L^{-3}$	$kg.m^{-3}$
Densidad superficial	kilogramo por metro cuadrado	ϱA	$M.L^{-2}$	$kg.m^{-2}$
Volumen específico	metro cúbico por kilogramo	v	$L^3.M^{-1}$	$m^3.kg^{-1}$
Concentración másica	kilogramo por metro cúbico	ϱ, γ	$M.L^{-3}$	$kg.m^{-3}$

Fuente: [24, 40, 41].

A partir de estas siete unidades fundamentales, que permiten la medición de las correspondientes magnitudes físicas básicas, es posible obtener cualquier otra unidad de medida, denominada *unidad derivada*, que se utilizan para medir y evaluar otras magnitudes físicas. Las unidades derivadas son parte del Sistema Internacional de Unidades, y se derivan de las siete unidades básicas. Estas unidades derivadas poseen sus símbolos propios, como por ejemplo, N (newton), como unidad de Fuerza; no obstante, también pueden ser expresadas en unidades básicas (en este caso, un N = $m.kg.s^{-2}$). También puede darse el caso de otras unidades, que pueden ser expresadas a su vez tanto en unidades derivadas como en básicas, por ejemplo, la unidad correspondiente al potencial eléctrico: el voltio, cuyo símbolo es: V, y puede ser expresado como: $J.C^{-1}$ (Joule por Culombio a la menos 1: unidades derivadas), o bien ser notado como: $kg.m^{2}.A^{-1}s^{-3}$: unidades básicas.

En la tabla 1.4 se presentan algunas de las principales unidades derivadas. Para una mayor ilustración sobre este aspecto, ver el anexo III.

Tabla 1.4. Magnitudes y unidades SI derivadas coherentes con nombres y símbolos especiales

Magnitud física	**Nombre**	**Símbolo**	**Unidades derivadas y básicas**	**Fórmula dimensional**	**Expresada en unidades básicas**
Frecuencia	hercio	Hz		T^{-1}	s^{-1}
Fuerza	newton	N		$M.L.T^{-2}$	$kg.m.s^{-2}$
Presión, tensión	pascal	Pa	$N.m^{-2}$	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$kg. m^{-1}. s^{-2}$
Energía, trabajo, calor	julio	J	N.m	$M.L^{2}.T^{-2}$	$kg.m^{2}. s^{-2}$
Potencia, flujo energético	vatio	W	$J.s^{-1}$	$M.L^{2}.T^{-3}$	$kg.m^{2}.s^{-3}$
Carga eléctrica, cantidad de electricidad	culombio	C		$L^{2}.T$	A.s
Diferencia de potencial eléctrico, fuerza electromotriz	voltio	V	$J.C^{-1}$	$M. L^{2}.T^{-3}.I^{-1}$	$kg. m^{2}. s^{-3}.A^{-1}$
Resistencia eléctrica	ohmio	Ω	$V.A-^{1}$	$L^{2}.M.T^{-3}.I^{-2}$	$m^{2}.kg. s^{-3}.A^{-2}$
Temperatura Celsius	grado Celsius	°C		T	K
Flujo magnético	weber	Wb	V.s	$L^{2}.M.T^{-2}.L^{-2}$	$m^{2}.kg. s^{-2}.A^{-1}$

Fuente: [24, 40, 41].

Tabla 1.5. Ejemplos de unidades SI derivadas coherentes cuyos nombres y símbolos contienen unidades SI derivadas coherentes con nombres y símbolos especiales

Magnitud derivada	**Nombre**	**Símbolo**	**Fórmula dimensional**	**Expresada en unidades SI básicas**
Viscosidad dinámica	pascal segundo	Pa s	$M.L^{-1}.T^{-1}$	$kg.m^{-1}.\ s^{-1}$
Momento de una fuerza	newton metro	N m	$M.L^{2}.T^{-2}$	$kg.m^{2}.s^{-2}$
Tensión superficial	newton por metro	N/m	$M.T^{-2}$	$kg.s^{-2}$
Velocidad angular	radián por segundo	rad/s	T^{-1}	$m.m^{-1}.s^{-1} = s^{-1}$
Aceleración angular	radián por segundo cuadrado	rad/s^{2}	T^{-2}	$m.m^{-1}.s^{-2} = s^{-2}$
Energía másica	julio por kilogramo	J/kg	$L^{2}.T^{-2}$	$m^{2}.s^{-2}$
Conductividad térmica	vatio por metro y kelvin	W/(m K)	$L.M.T^{-3}.\theta^{-1}$	$m.kg.s^{-3}.K^{-1}$
Densidad de energía	julio por metro cúbico	J/m^{3}	$M.L^{-1}.T^{-2}.$	$kg.m^{-1}.s^{-2}$
Entropía molar, capacidad calorífica molar	julio por mol y kelvin	J/(mol K)	$M.L^{2}.T^{-2}.\theta^{-1}N^{-1}$	$kg.m^{2}.s^{-2}.K^{-1}.mol^{-1}$

Fuente: [40, 41].

Tabla 1.6. Unidades no pertenecientes al SI cuyo uso con el SI está aceptado

Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo de la unidad	Valor en unidades SI
Tiempo, duración	minuto	min	1 min = 60 s
	hora	h	1 h = 60 min = 3 600 s
	día	d	1 d = 24 h = 86 400 s
Ángulo plano	grado	°	1° = (π/180) rad
	minuto	’	1’ = (1/60)° = (π/10 800) rad
	segundo	”	1” = (1/60)’ = (π/648 000) rad
Área, superficie	hectárea	ha	1 ha = 1hm^2 = 10^4 m^2
Volumen	litro	L, l	1 L = 1 dm^3 = 10^{-3} m^3
Masa	tonelada	t	1 t = 10^3 kg

Fuente: [40, 41].

Tabla 1.7. Otras unidades no pertenecientes al SI

Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo de la unidad	Valor en unidades SI
Presión	bar	bar	1 bar = 0,1 MPa = 10^5 Pa
	milímetro de mercurio	mm Hg	1 mm Hg ≈ 133,322 Pa
Longitud	angström	Å	1 Å = 0,1 nm = 10-10 m
Distancia	milla náutica	M	1 M = 1852 m
Área, superficie	barn	b	1 b = 100 fm^2 = 10^{-28} m^2
Velocidad	nudo	kn	1 kn = (1852/3600) m s^{-1}
Logaritmo de un cociente	neper	Np	
	belio	B	
	decibelio	dB	

Fuente: [40, 41].

Tabla 1.8. Unidades no pertenecientes al SI, asociadas a los sistemas de unidades CGS

Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo de la unidad	Valor en unidades SI
Energía	ergio	erg	1 erg = 10^{-7} J
Fuerza	dina	dyn	1 dyn = 10^{-5} N
Viscosidad dinámica	poise	P	1 P = 1 dyn.s.cm^{-2} = 0,1 Pa.s
Viscosidad cinemática	stokes	St	1 St = 1 $cm^2.s^{-1}$ = 10^{-4} $m^2.s^{-1}$
Flujo magnético	maxwell	Mx	1 Mx = 1 G.cm^2 = 10^{-8} Wb
Densidad de flujo magnético	gauss	G	1 G = 1 Mx.cm^{-2} = 10^{-4} T
Campo magnético	œrsted	Oe	1 Oe $\triangleq$ (103/4π) A.m^{-1}

Fuente: [40, 41].

Los *prefijos del Sistema Internacional* se utilizan para nombrar o denominar a los *múltiplos y submúltiplos* de cualquier unidad: básica o derivada del SI. Se anteponen al nombre de la unidad en cuestión para indicar el múltiplo o submúltiplo decimal de la misma; de igual modo, y correspondientemente, los símbolos de los prefijos se anteponen a los símbolos de las unidades [43].

En las tablas 1.9 y 1.10, aparecen algunos de los principales prefijos del SI. Para una mayor ilustración sobre este aspecto ver el anexo IV.

Estos prefijos nos facilitan mucho el expresar de una manera más conveniente una determinada magnitud; pongamos por ejemplo, las siguientes magnitudes físicas:

Longitud: nanómetro, micrómetro, milímetro, centímetro, decímetro, METRO, kilómetro, etc.

Tiempo: nanosegundo, microsegundo, milisegundo, SEGUNDO, etc.

Masa: microgramo, miligramo, decigramo, gramo, KILOGRAMO, hectogramo, etc.

Tabla 1.9. Prefijos (múltiplos) del Sistema Internacional de Medidas

Prefijos		Símbolo	Equivalencia decimal en los prefijos del SI	N. C.
MÚLTIPLOS	yotta	Y	1 000 000 000 000 000 000 000 000	1.10^{24}
	zette	Z	1 000 000 000 000 000 000 000	1.10^{21}
	exa	E	1 000 000 000 000 000 000	1.10^{18}
	peta	P	1 000 000 000 000 000	1.10^{15}
	tera	T	1 000 000 000 000	1.10^{12}
	giga	G	1 000 000 000	1.10^{9}
	mega	M	1 000 000	1.10^{6}
	kilo	k	1 000	1.10^{3}
	hecto	h	100	1.10^{2}
	deca	da	10	1.10^{1}

Fuente: [40, 44].

Tabla 1.10. Prefijos (submúltiplos) del Sistema Internacional de Medidas

Prefijos		Símbolo	Equivalencia decimal en los prefijos del SI	N. C.
SUBMÚLTIPLOS	deci	Y	0,1	1.10^{-1}
	centi	Z	0,01	1.10^{-2}
	mili	E	0,001	1.10^{-3}
	micro	P	0,000 001	1.10^{-6}
	nano	T	0,000 000 001	1.10^{-9}
	pico	G	0,000 000 000 001	1.10^{-12}
	femto	M	0,000 000 000 000 001	1.10^{-15}
	atto	k	0,000 000 000 000 000 001	1.10^{-18}
	zepto	h	0,000 000 000 000 000 000 001	1.10^{-21}
	yocto	da	0,000 000 000 000 000 000 000 001	1.10^{-24}

Fuente: [40, 44].

Una observación necesaria:

¿Qué usar: punto (.), coma (,): como separador decimal? ¿Cómo separar los millares?

Estas dos preguntas han resultado controversiales en las últimas décadas. En este sentido, el Sistema Internacional de Unidades (SI), en cuanto al uso de la coma o el punto, como separador decimal, da las dos posibilidades; no obstante, es bueno destacar que existe la tendencia del uso del punto en países angloparlantes y de la coma en la región europea y en países de América Central y América del Sur (aunque existen excepciones como el caso de Costa Rica —donde es informal— y Panamá, Guatemala, Honduras, El Salvador, México, Nicaragua y República Dominicana que usan el punto como separador decimal). Canadá usa la coma decimal solamente en la parte francoparlante.

Las tablas 1.8 y 1.9 ilustran claramente lo expuesto anteriormente para los países no angloparlantes. De lo contrario, se utilizaría, el punto como separador decimal.

Los países de la región Andina (Bolivia, Colombia, Perú y Ecuador) utilizan la coma como separador decimal, y no el punto; así como dejar un espacio en blanco como separador de los millares. Detalles al respecto se pueden consultar en *Uso del Sistema Internacional de Unidades (SI) en la Comunidad Andina*, documento de la Secretaria General de la Comunidad Andina (http://www.comunidadandina.org/StaticFiles/201166181942SGde278.pdf).

A tenor con lo anterior, en nuestra Dirección de Publicaciones de la Espoch, se estipula lo siguiente: "Hemos normado el uso de la coma como separador decimal, y dejar un espacio en blanco como separador de los millares, solamente admitimos el uso del punto como separador decimal, en el caso que se tomen citas de trozos de texto en inglés".

1.2.4. Símbolos dimensionales. Análisis dimensional

En repetidas ocasiones, se vienen manejando los importantes términos: símbolo dimensional, fórmula dimensional y análisis dimensional (ver tablas 1.1 a 1.4, donde aparecen las diferentes magnitudes físicas fundamentales y derivadas y los símbolos y fórmulas dimensionales).

¿Cuál es el significado en Física de símbolo dimensional y análisis dimensional? ¿Cómo se representan las fórmulas o ecuaciones dimensionales?

¿Por qué resultan tan importantes las fórmulas dimensionales? ¿Cómo se utilizan? ¿Cuáles son sus fines?, ¿Cómo podemos conocer si una fórmula que representa una determinada magnitud física es correcta o no?

El análisis dimensional constituye un aspecto de primordial importancia en la formación de todo profesional; especialmente en las carreras de Ciencias Exactas, Ingenierías y en algunas Licenciaturas, etc. No pocos estudiantes cometen garrafales errores de cálculo al no atender debidamente este aspecto en su formación.

Las fórmulas y el análisis dimensional de los modelos matemáticos representan una herramienta de probada utilidad, que permiten simplificar el estudio de cualquier fenómeno físico o de otra índole; en el caso que nos ocupa, en el estudio y análisis de los fenómenos físicos donde intervienen diversas variables dependientes e independientes correspondientes a diversas magnitudes físicas que guardan una estrecha relación causa–efecto en determinados casos particulares. En este orden, se podrían poner numerosos ejemplos, pero solo basta citar los principios de Pascal, Bernoulli o Arquímedes como expresiones axiomáticas de lo anteriormente afirmado. La propia concepción de las hipótesis en las investigaciones en los muy diversos campos de la vida de la sociedad, sería imposible imaginarlas sin esta correspondencia biunívoca de estas variables.[1.10]

Es por ello que las expresiones dimensionales, a través de la utilización de sus símbolos, nos ayudan mucho durante el análisis de las ecuaciones o fórmulas físicas, pues son expresiones algebraicas que tienen como variables a las unidades fundamentales y derivadas, las cuales se usan para demostrar fórmulas, equivalencias o para dar unidades a una respuesta.

(1.10) "Se podría citar toda una larga clasificación de hipótesis: de investigación, nulas, alternativas, estadísticas, etc., (Hernández, 2003) pero realmente lo más importante es conocer la relación causa-efecto que guardan las variables independientes y dependientes respectivamente —las independientes se manipulan, según un determinado diseño experimental—: experimentos de comparación simple, diseño completamente al azar, por bloques aleatorizado, cuadrado latino, diseños factoriales, factorial en bloques, factorial fraccionario, etc., (Carrasco, 2003), mientras que el efecto se mide" [76]

La representación de las ecuaciones dimensionales viene dada por el símbolo encerrado entre corchetes. Veamos a continuación cómo se escribe la representación de la magnitud A:

[A]: se lee: ecuación dimensional de A

Supongamos, p. ej., que A es una función de la fuerza, el área y la densidad, en la siguiente relación:

$$[A] = \frac{[\text{fuerza}].\,[\text{área}]}{[\text{densidad}]} \tag{1.1}$$

Entonces, su representación dimensional será:

$$[A] = \frac{(MLT^{-2}).(L^{2})}{ML^{-3}} = L^{6}\ T^{-2} \tag{1.2}$$

De igual forma, si asumimos, p. ej., que A es una función de la fuerza, la potencia, el trabajo y la presión, según la siguiente relación, tendremos, que su representación dimensional será:

$$[A] = \left[\frac{(\text{fuerza})^{2}.(\text{potencia})^{3}}{(\text{presión})^{3}.(\text{trabajo})^{2}}\right] \tag{1.3}$$

$$[A] = \frac{(MLT^{-2}).(ML^{2}T^{-3})^{3}}{(ML^{-1}T^{-2})^{3}.(ML^{2}T^{-2})^{2}} = L^{6}\ T^{-2} \tag{1.4}$$

$$[A] = \frac{M^{2}\,L^{2}\,T^{-4}.M^{3}\,L^{6}\,T^{-9}}{M^{3}\,L^{-3}\,T^{-6}.M^{2}\,L^{4}\,T^{-4)}} = L^{7}\ T^{-3} \tag{1.5}$$

Un aspecto muy importante es cuando una expresión posee un exponente que no sea numérico, sino como función de otras dimensiones o magnitudes. En estos casos, el corchete no afectará dicho coeficiente. Solamente a la base.

Téngase p. ej., la expresión:

$A = Be^{Rt}$

Entonces, cuando escribimos la expresión anterior de forma dimensional, procedemos de la siguiente manera: afectamos únicamente a las bases; y, jamás a los exponentes

$[A] = [B][e]^{Rt}$

Como se puede observar, solamente se expresan dimensionalmente la ecuación A y las bases B y e, pero no el exponente Rt.

Finalmente, el análisis dimensional también es una herramienta muy útil para detectar errores en los cálculos científicos e ingenieriles. Con este fin, se comprueba la congruencia de las unidades empleadas en los cálculos, prestando especial atención a las unidades de los resultados obtenidos.

Por todo ello, podríamos definir el análisis dimensional al procedimiento que nos permite deducir una expresión matemática o una ecuación o simplemente verificar su validez; asumiendo que las dimensiones pueden ser tratadas como cantidades algebraicas [45].

El análisis dimensional tiene una aplicación extremadamente ventajosa cuando se trabaja con objetos paramétricos (maquetas funcionales) en el campo de las ingenierías. Por ejemplo, para diseñar y construir una máquina compleja, como lo es una cosechadora de caña de azúcar, se deben emplear muchos recursos humanos, materiales y financieros, desde la concepción de la tarea técnica (según requerimientos del cliente), hasta construir la "serie cero" (primer lote de máquinas construido y probado bajo la supervisión y aceptación del cliente), habiendo pasado antes por la construcción de diferentes prototipos, en mutua interdependencia del estudio causa-efecto de las variables independientes y dependientes objeto de estudio, y sus indispensables lazos de regresión.

La experiencia acumulada por más de 30 años en la construcción de maquinaria dentro de la industria mecánica permite a los autores dar fe de las indiscutibles ventajas y aplicaciones del análisis dimensional en la concepción de diferentes máquinas y equipos pesados en el campo de la ingeniería mecánica.

Decíamos inicialmente que la construcción de una maqueta funcional (máquina a escala) permitía el ahorro de innumerables recursos, a la vez que permite monitorear con una mayor facilidad el comportamiento de las variables. Por todo ello, se pueden dilucidar un conjunto de aplicaciones del análisis dimensional, tales como:

- *Creación y estudio de modelos reducidos* (como es el caso de las maquetas funcionales, que guardan una adecuada relación paramétrica con los objetos reales).

- *Consideraciones sobre la influencia de posibles cambios en los modelos, etc.* (en función de las pruebas realizadas: agrotécnicas, tensométricas o de explotación controlada, por ejemplo, en el caso de una máquina o implemento agrícola).

- *Detección de errores de cálculo* (especialmente cuando el objeto de estudio es una máquina compleja, donde cada subsistema posee muy variados mecanismos, cuyos principios de funcionamiento están directamente relacionados con modelos físico-matemáticos, asociados al comportamiento cinemático y dinámico de sus elementos componentes durante el trabajo. Y, en este contexto, se podrían citar, p. ej., la sección receptora de la máquina cosechadora, el subconjunto de corte, los subsistemas transportadores, chasis y cabina, etc.; todos los cuales, durante su armónico y sistémico trabajo, dependen del cálculo de la potencia llevado a cabo para determinar la exigencia total que requiere la máquina, en función de los requerimientos de sus diferentes subsistemas.

Este aspecto es bien interesante, pues se puede partir de una máquina con un determinado porte deseado, con una potencia preestablecida, según la prestación requerida, y de ahí derivar el árbol de potencia, según estudio de los requerimientos o necesidades energéticas de los diferentes elementos componentes (subsistemas). O, por el contrario, se puede fijar el consumo de potencia de un órgano o subsistema fundamental de la máquina, según la productividad pretendida (por ejemplo la sección receptora) y estudiar el comportamiento de los demás subsistemas, en su interdependencia con el primero, a lo largo de todo su esquema tecnológico y motor, lo que permitirá obtener finalmente la ecuación fundamental de la potencia requerida; teniendo en cuenta en la misma las eficiencias de los subsistemas y la total de la máquina, en función de las primeras; todo ello relacionado directamente con el comportamiento cinemático y dinámico de la máquina y las consecuentes pérdidas energéticas por fricción durante su funcionamiento. Como puede observarse, son múltiples los modelos matemáticos objeto de estudio, buscando la optimización de los resultados en su aplicación; por lo que el análisis dimensional en los mismos resulta extremadamente beneficioso en la consecución de tal empeño. En este caso particular, el análisis dimensional nos permitió, tal y como apuntábamos anteriormente, la consistencia dimensional de todas las ecuaciones utilizadas en los cálculos durante la Investigación-Desarrollo-innovación (I-D-i) de la nueva máquina objeto de estudio; alejándonos de posibles errores en el uso de los modelos matemáticos.

- *Resolución de problemas cuya solución directa conlleva dificultades matemáticas casi insalvables.*

  Siguiendo con el proceso de I-D-i de la máquina cosechadora, especialmente difícil y laboriosa resultó la determinación del comportamiento cinemático de una partícula bajo la acción de un flujo de aire, en condiciones de laboratorio, utilizando una maqueta real y trozos de caña durante los ensayos. El problema consistió en determinar la velocidad óptima del aire en los ventiladores de limpieza e impulsión, que permitieran tan solo un 5 % a 8 % de pérdidas de masa vegetal (caña); así como la trayectoria seguida, durante las pruebas agrotécnicas.

  Se podía partir de las fórmulas tradicionales conocidas: de velocidad y espacio recorrido, pero las mismas, si bien podían constituir un punto de partida, a la postre, fueron las pruebas, los ensayos de laboratorio, los que nos permitieron obtener los modelos matemáticos optimizados; evaluando variables y coeficientes, que nos acercaron y condujeron a determinar el comportamiento cinemático real del objeto de estudio (a través de la maximización y minimización de variables).

  Si analizamos la determinación del coeficiente de fricción desde los primeros ensayos llevados a cabo por el polímata Leonardo da Vinci, en 1508, hasta nuestros días, podemos constatar que un modelo prístino se multiplicó en otros muy variables cuando los ensayos se realizaban en diferentes condiciones; y así, este empeño fue dando sus frutos a través de los estudios realizados por Amontons (1699), que estableció la dependencia de la fuerza de fricción a la fuerza normal, e independencia de la misma del área geométrica de la superficie en contacto (dando lugar a la primera y segunda leyes clásicas de la fricción). Posteriormente, Hire estableció un modelo de fricción, según el cual se debe a la rugosidad superficial; en 1734, Desagulier enfoca el fenómeno de la fricción a través de una nueva concepción: la teoría molecular —teoría desarrollada posteriormente por Hardy (1919), Tolinson (1929), Deriagin (1934)—. Con el paso del tiempo, en 1781 Coulomb realizó nuevos ensayos y se establecieron nuevos modelos, que si bien no contradicen a los anteriores, propician una visión muy interesante del fenómeno de la fricción: su independencia de la velocidad de desplazamiento, y su dependencia de las características de los materiales de los cuerpos en contacto (tercera y cuarta leyes clásicas de la fricción). Gumbell (1921) consideró que, durante el movimiento relativo de los cuerpos, en los puntos de contacto entre las dos superficies, se producen deformaciones elásticas y plásticas: teoría deformacional. Por otra parte, en 1936, el profesor Kragelsky consideró la fricción como un efecto combinado de adhesión molecular y engranaje de las asperezas en contacto; mientras que, en 1940, Ernest y Merchant plantean la teoría de acuerdo con la cual la fricción está condicionada a la adhesión y la rugosidad superficial.

El modelo matemático de la fricción inicial estableciá de una forma muy sencilla que la fricción es directamente proporcional a la fuerza normal actuante, multiplicada por un coeficiente adimensional. Finalmente fue este coeficiente adimensional el objeto de prolongados estudios. Se hicieron múltiples ensayos, en muy variadas condiciones. Como resultado de dichos estudios, se identificaron diferentes tipos de coeficientes de fricción, según variaban las condiciones actuantes. Por solo citar un ejemplo, el coeficiente de fricción determinado para un contacto elástico, no saturado, obedece al siguiente modelo matemático:

$$f = \frac{2{,}4.\tau_0}{P_c^{0,2}.\Delta^{0,4}}\left(\frac{1-\mu^2}{E}\right)^{0,8} + \beta + 0{,}5.\alpha.P_c^{0,2}.\Delta^{0,4}.\left(\frac{1-\mu^2}{E}\right)^{0,2} \tag{1.6}$$

Donde el coeficiente de fricción depende de la rugosidad superficial (Δ), la presión de contacto (Pc), la presión normal (Pn), el módulo de elasticidad (E), el módulo de Poisson (μ), y los coeficientes: de histéresis (α), de fricción en componente adhesiva (β) y a cortante (τo). Como se puede observar, la aplicación de una fórmula dimensional fue imprescindible, para obtener un coeficiente de fricción adimensional. Le queda al lector interesado establecer la fórmula dimensional correspondiente, cuyo resultado debe ser adimensional.

Las operaciones dimensionales de suma o resta, únicamente se pueden llevar a cabo si los símbolos dimensionales corresponden a iguales magnitudes físicas; de lo contrario, matemáticamente es imposible llevar a cabo tales operaciones.

Los símbolos dimensionales (L, M, T, I, θ, N, J) corresponden a las siete unidades y magnitudes básicas o fundamentales; de ellos resultan las diferentes fórmulas dimensionales correspondientes a las magnitudes y unidades derivadas.

Según lo anteriormente explicado, las dimensiones de las magnitudes derivadas se escriben en forma de producto de potencias de las dimensiones de las magnitudes básicas. A tenor con lo anterior, la dimensión de la magnitud Q se puede expresar según la siguiente expresión [24].

$$\mathrm{Dim}Q = L^{\alpha} . M^{\beta} . T^{\gamma} . I^{\delta} . \theta^{\varepsilon} . N^{\zeta} . J^{\eta} \quad (1.7)$$

Los exponentes α, β, γ, δ, ε, ζ, y η: exponentes dimensionales, pueden ser números enteros pequeños, positivos, negativos o cero.

En el caso de expresiones adimensionales (de dimensión uno), en la ecuación anterior, todos los exponentes dimensionales son igual a cero. Son expresiones numéricas sin dimensión, por lo que al expresarlas dimensionalmente se igualan a un asterisco (*); pero, por lo general, y persiguiendo fines prácticos, podemos observar que, en muchos libros, a estas se las representa igualándolas a la unidad. Veamos algunos ejemplos:

$$[3645]=1;[\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}]=1;[\ 9]=1;[\cos\beta]=1;[\log N]=1;[e]=1 \quad (1.8)$$

En resumen:

El análisis dimensional es una parte de la Física que estudia la forma cómo se relacionan las magnitudes derivadas con las fundamentales. Procedimiento que nos permite deducir una expresión matemática o una ecuación o simplemente verificar su validez; asumiendo que las dimensiones pueden ser tratadas como cantidades algebraicas.

Tal estudio se hace básicamente para detectar o descubrir errores en los resultados de los cálculos, en lo que a las unidades fundamentales se refiere. Es decir, es un procedimiento con el cual se puede comprobar la consistencia dimensional de cualquier

1.2.5. Ejemplos de análisis dimensional de modelos matemáticos de algunas de las principales magnitudes físicas

Ejemplo 1:

Tomemos como ejemplo el principio de la energía mecánica total de un cuerpo, que es la suma de su energía cinética más su energía potencial (puede ser: potencial gravitatoria, como es el caso de este ejemplo, o potencial elástica):

$$Em = Ec + Ep \tag{1.9}$$

Expresando la energía cinética y potencial tendremos:

$$E = \frac{1}{2} m.v^2 + mgh \tag{1.10}$$

La expresión anterior podemos escribirla expresando la *velocidad* y la *aceleración* según las magnitudes fundamentales:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{t}\right)^2 + m\frac{e}{t^2}h \tag{1.11}$$

La forma dimensional de esta misma expresión queda definida según la fórmula 1.12.

$$E = \frac{1}{2}[M][L]^2[T]^{-2} + [M][L]^2[T]^{-2} \tag{1.12}$$

Como puede observarse, tanto en la *energía cinética* (un medio de la masa por la velocidad al cuadrado) como la *energía potencial* (la masa por la gravedad y por la altura) se llega al mismo resultado; ambas magnitudes poseen idéntica expresión dimensional. Si, posteriormente, la ecuación anterior se expresa en unidades básicas del SI se obtendrá lógicamente el mismo resultado; y la unidad derivada del SI resultante será el joule (correspondiente a la unidad con que se expresa el trabajo, el calor y la energía).

Ejemplo 2:

En este segundo ejemplo veremos cómo expresar dimensionalmente, magnitudes tan importantes como: la *velocidad*, la *aceleración*, la *fuerza* y el *trabajo*.

Analicemos primeramente la magnitud física velocidad.

En la expresión 1.13, aparece el modelo matemático de la velocidad:

$$v = velocidad = \frac{espacio}{tiempo} = \frac{d}{t} \tag{1.13}$$

Veamos ahora como llegar a su expresión utilizando símbolos dimensionales, conociendo que el espacio recorrido se expresa con el símbolo dimensional "L" y el tiempo con "T":

$$v = \frac{L}{T} = L.T^{-1} \tag{1.14}$$

Detengámonos ahora para ver qué sucede con las magnitudes aceleración, fuerza y trabajo. Las expresiones 1.15, 1.16 y 1.17 nos ilustran analíticamente todo el proceso hasta llegar a la expresión final.

$$a = aceleración = \frac{velocidad}{tiempo} = \frac{v}{t} = \frac{L.T^{-1}}{T} = L.T^{-2} \tag{1.15}$$

$$F = fuerza = masa.aceleración = m.a = M.L.T^{-2} \tag{1.16}$$

$$Trabajo = W = fuerza.desplazamiento = F.d = M.L^{2}.T^{-2} \tag{1.17}$$

A manera de resumen:

Habíamos dicho que, en el Sistema Internacional de Unidades, existen siete magnitudes físicas básicas o fundamentales y el resto son las magnitudes físicas derivadas; y que estas últimas quedan definidas a partir de operaciones entre las primeras. Así, p. ej., en la tabla 1.11, tenemos algunas de las magnitudes físicas derivadas, sus relaciones, unidades y dimensiones, de uso más común en la física mecánica.

Tabla 1.11. Magnitudes físicas derivadas, sus relaciones, unidades y dimensiones, de uso más común en la física mecánica

MAGNITUD	FÓRMULA	UNIDAD	DIMENSIÓN
Velocidad	$v = \frac{l}{t}$	$\frac{m}{s}$	$L.T^{-1}$
Aceleración	$v = \frac{l}{t^2}$	$\frac{m}{s^2}$	$L.T^{-2}$
Fuerza	$F = m \,.\, a$	newton (N)	$M.L.T^{-2}$
Trabajo	$T,W = F \,.\, l$	joule (J)	$M.L^2.T^{-2}$
Energía cinética	$E_c = \frac{1}{2} m.v^2$	joule (J)	$M.L^2.T^{-2}$
Energía potencial gravitatoria	$E_g = m.g.h$	joule (J)	$M.L^2.T^{-2}$
Energía potencial gravitatoria	$E_e = \frac{1}{2} k.x^2$	joule (J)	$M.L^2.T^{-2}$
Calor	$Q = m \,.\, c_e \,.\, \Delta t$ $Q = m \,.\, L$	joule (J)	$M.L^2.T^{-2}$
Potencia	$p = \frac{T,W}{t}$		$M.L^2.T^{-3}$
Área	$A = l^2$	m^2	L^2
Volumen	$V = l^3$	m^3	L^3
Densidad	$\varrho = \frac{m}{V}$		$M.L^{-3}$
Presión	$p = \frac{F}{A}$	pascal (Pa)	$M.L^1.T^{-2}$
Carga eléctrica	$q = I \,.\, t$	coulomb (C)	I.T.

1.2.6. Conversión de unidades en el Sistema Internacional

Dada la existencia de diferentes sistemas de unidades, se impuso el imperativo de elaborar y establecer un sistema de conversión, que permitiera y facilitara la transformación del valor numérico de una magnitud física dada —expresado en una cierta unidad de medida, por ejemplo, el metro (SI)—, en otro valor numérico equivalente y expresado en otra unidad de medida de la misma naturaleza, por ejemplo, el pie (Sistema Inglés). Para este caso específico 1 pie = 0,3048 m. Para ello fue necesaria la utilización de factores de conversión y/o tablas de conversión de unidades. En el anexo V, se da una información más ampliada sobre este importante tópico. Gracias a estos factores de conversión, se eliminó la barrera existente en innumerables operaciones y cálculos, ya se esté hablando del comercio, procesos industriales, concepción de equipos de medición, investigaciones e innumerables hechos cotidianos.

1.2.7. Conversión decádica en los sistemas lineales, cuadráticos y cúbicos

Asombrosamente, y con demasiada frecuencia, se observan evidentes dificultades en los estudiantes a la hora de efectuar las sencillas operaciones de conversión lineal, cuadrática o cúbica; cuando pretenden expresar el valor de una determinada cantidad en cualquiera de las magnitudes físicas básicas o derivadas en sus múltiplos o submúltiplos cometen lamentables errores, ya se esté hablando de longitudes, masa, peso, etc.

A continuación, se presentan representaciones graficas que les facilitarán dichas conversiones.

Tomaremos la magnitud *longitud*, para hacer las transformaciones de un múltiplo a un submúltiplo, y viceversa, lo cual lógicamente es válido para las demás magnitudes físicas.

En la figura 1.1 se pueden observar las transformaciones decádicas de la magnitud *longitud*; barriendo un intervalo de 1 km a 1 mm. De igual manera puede constatarse muy fácilmente que 1 m = 10^3 mm; o viceversa, 1 mm = 10^{-3} m. La figura 1.2 solo ejemplifica un caso particular de derivación decádica; en este caso, 1 m = 10 dm.

Fig. 1.1. Representación gráfica de las conversiones LINEALES
de la magnitud física longitud

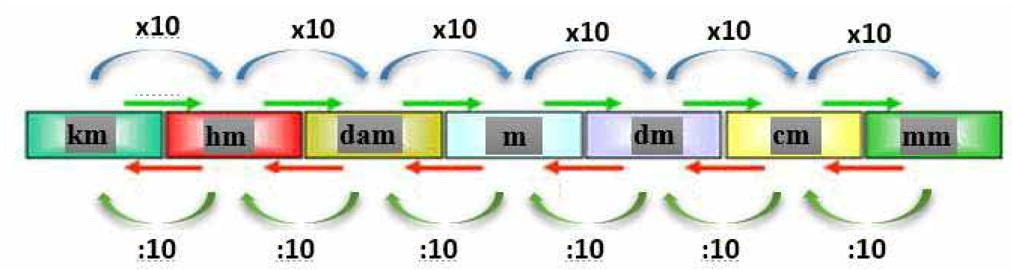
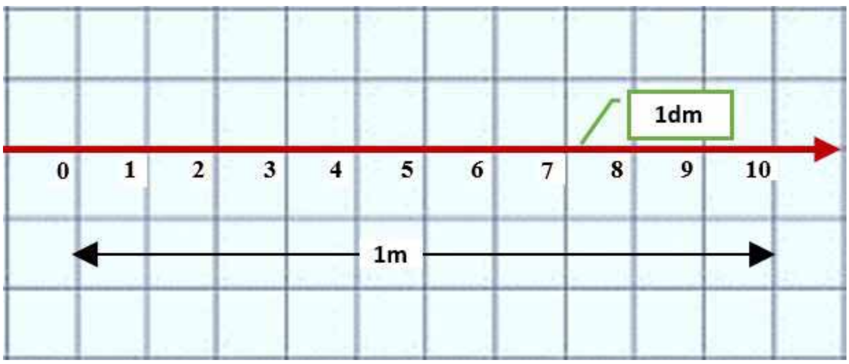


Fig. 1.2. Representación gráfica de las distribuciones decádica: 1 m = 10 dm

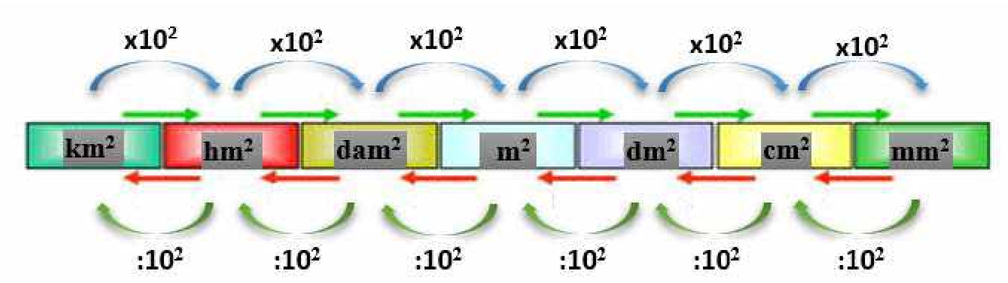


Un razonamiento similar se da en las trasformaciones cuadráticas (ver fig. 1.3), por ejemplo:

$1\ m^2 = 10^2\ dm^2 = 104\ cm^2 = 106\ mm^2$; o viceversa:

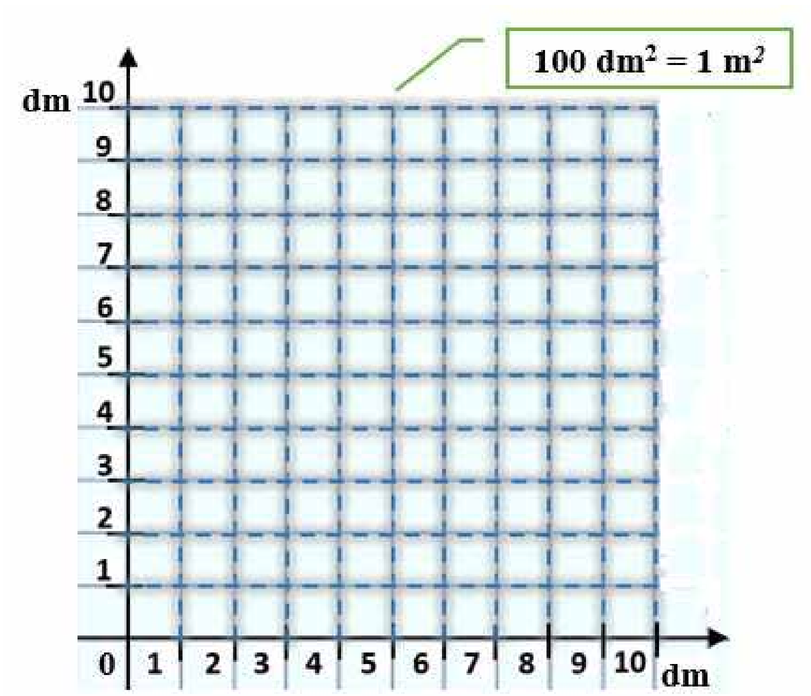
$1\ mm^2 = 10^{-2}\ cm^2 = 10^{-4}\ dm^2 = 10^{-6}\ m^2$

Fig. 1.3. Representación gráfica de las conversiones CUADRÁTICAS de la magnitud física longitud



En la figura 1.4, se ejemplifica con un caso particular, donde 1 $m^2 = 10^2$ dm^2.

Fig. 1.4. Representación gráfica de 1 m^2 en función del dm^2



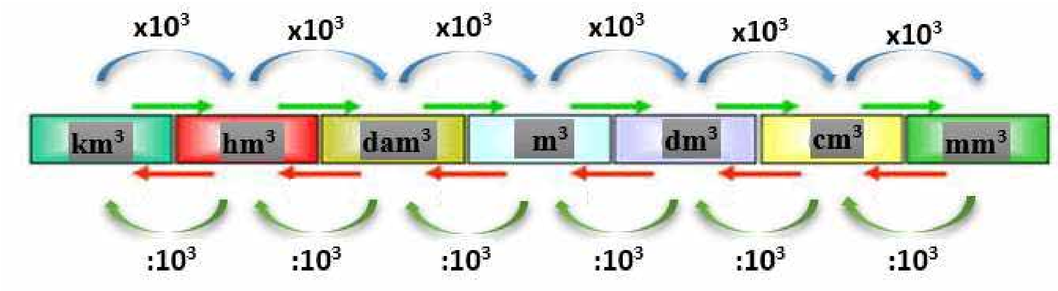
La figura 1.5 representa la derivación por niveles tridimensionalmente, es decir, trabajando en R3. Observe como cada salto significan tres ceros, correspondiente a cada uno de los eje de coordenada.

En las trasformaciones cúbicas igualmente se cumple la lógica anterior (ver fig. 1.5), por ejemplo:

1 $m^3 = 10^3$ $dm^3 = 10^6$ $cm^3 = 10^9$ mm^3; o, viceversa:

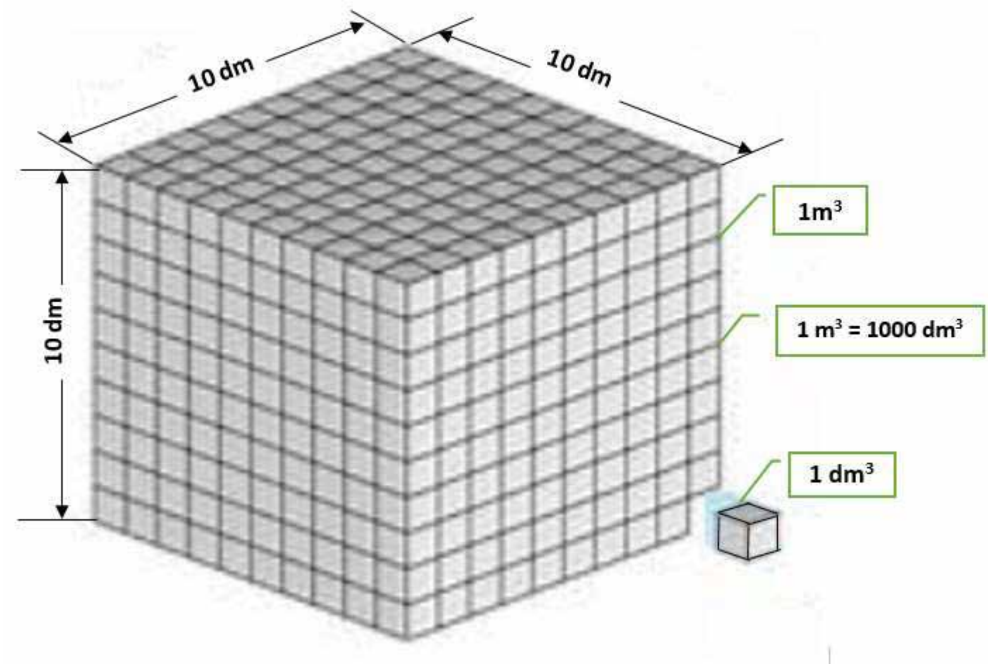
1 $mm^3 = 10^{-3}$ $cm^3 = 10^{-6}$ $dm^3 = 10^{-9}$ m^3

Fig. 1.5. Representación gráfica de las conversiones CÚBICAS
de la magnitud física longitud



La figura 1.6 muestra un metro cúbico, el cual es equivalente a 10^3 dm^3.

Fig. 1.6. Representación gráfica de 1 m³ en función del dm³



1.3. INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN

Hasta aquí, hemos estudiado importantes conceptos que nos han posibilitado comprender mejor el encargo social de esta importante disciplina llamada Física. Estudiamos los conceptos de medición, sistemas de medidas, la incertidumbre en las mediciones, entre otros. Solo falta precisar con qué hemos de realizar estas mediciones. Las magnitudes físicas, tanto escalares como vectoriales, son verdaderamente numerosas; y cada una de ellas requiere un instrumento, una escala de medición y un procedimiento. No nos detendremos, por el momento en los procedimientos, sino que concentraremos nuestra atención en el aparato o medio utilizado para llevar a cabo esta importantísima acción, sin la cual no sería posible la vida y el progreso de la humanidad.

Entonces, ¿cómo podríamos definir el instrumento de medición? Veamos:

Podríamos definirlo de la siguiente manera: es aquel aparato (dispositivo o mecanismo: mecánico, eléctrico o electrónico, o combinación de los anteriores) que posibilita comparar magnitudes físicas mediante el denominado proceso de medición.

Ahora bien, ¿cuáles serían las unidades de medidas que se debe utilizar?

Existen muchas definiciones que se refieren a un mismo concepto. Veamos un ejemplo: "Como unidades de medida se utilizan objetos y sucesos previamente establecidos como estándares o patrones, y de la medición resulta un número que es la relación entre el objeto de estudio y la unidad de referencia. Los instrumentos de medición son el medio por el que se hace esta lógica conversión" [46].

Algunos de los instrumentos de medición más frecuentemente utilizados son: longitud: metro (en cintas flexibles o en forma de reglas articuladas), regla, micrómetro, pie de rey; masa: balanza; tiempo: reloj y cronómetro; temperatura: termómetro. De estos existe una muy amplia variedad.

1.3.1. Instrumentos de medición de longitudes, con escala milimétrica

Existe una amplia gama de estos instrumentos de medición. Los hay con una menor exactitud, tales como la regla (fig. 1.7a), el metro plegable (fig. 1.7b) y las cintas métricas, que pueden ser de tela o de material plástico, cuya longitud más frecuente es de 1,5 m (fig. 1.7c); un caso especial de estas cintas métricas son los flexómetros (figura 1.7d), fabricados comúnmente de fibra de vidrio y que su longitud varía entre 3 y 20 m, aunque se les halla de una mayor longitud (pueden alcanzar hasta 50 m).

En el caso de la regla graduada, se trata de un instrumento con forma de plancha delgada y rectangular, que posee una escala graduada dividida en centímetros o en pulgadas (unidades de medida); es un instrumento muy útil para el trazado de segmentos rectilíneos; comúnmente son construidas de madera, metal, material plástico, entre otros; mientras, que la cinta métrica utilizada normalmente en la medición de distancias se construye en una delgada lámina de acero aleado al cromo o aluminio; pero también se construyen de un tramado de fibras de carbono unidas mediante un polímero de teflón (las más modernas). Las cintas métricas pueden tener diferentes longitudes, como por ejemplo, de 10, 15, 20, 25, 30, 50 y 100 metros; pero también con menores longitudes (de 1 a 10 m). Se denominan flexómetros y pueden incluir un mecanismo para rebobinado automático de la cinta [47].

En la figura 1.7, se muestran algunos ejemplos de estos instrumentos.

Fig. 1.7. Instrumentos de medición de longitudes, con escala en cm y mm. (a) Regla, (b) Metro plegable, (c) Cinta métrica plástica, (d) Cinta métrica metálica enrollada en su carcaza (flexómetro).

(a) (b) (c) (d)

Fuente: https://www.google.com/search?q=imagen+instrumentos+medicion+longitudes&client=firefox-b&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwj3u-6Pkq7SAhXK4CYKHcoIAEMQsAQIGg&biw=724&bih=743#imgrc=LsTVBkOuYLHZ3M)

1.3.2. Instrumentos de medición de longitudes, con escala milimétrica y micrométrica

También existen instrumentos de medición de longitudes de una mayor exactitud, como p. ej., el pie de rey y el micrómetro. Pero, antes de pasar a su descripción, hay un punto de suma importancia que destacar: el nonio o vernier, elemento fundamentalísimo que permite una mayor apreciación de los mismos.

Un aspecto, funcionalmente importante de los instrumentos de medición, donde se requiere una medición a escala milimétrica y micrométrica es el nonio o vernier. Es una segunda escala grabada sobre la corredera del instrumento, independientemente de la medida o el tipo de medida que se va a ejecutar, ya sea esta una medición lineal, angular o de otra naturaleza; incluso, sea cual sea la unidad de medida. El punto cero del nonio es el fiel de referencia. El nonio o escala vernier se divide en un número predeterminado de divisiones, según sea la exactitud que se pretenda del instrumento; en cualquier caso, cuando la lectura es cero —el fiel coincide con el cero de la regla— y la última división del nonio debe coincidir con una división de la regla (lo cual está en función de la unidad de la regla y el número de divisiones del nonio). Entre los instrumentos de medición que precisan de un nonio o vernier tenemos, como antes se dijo, el pie de rey y el micrómetro para la medición de longitudes, y otros como el astrolabio con nonio y el sextante, que permiten la medición de fracciones de grado de un ángulo (estos últimos instrumentos utilizan una escala sexagesimal).

Veamos a continuación las características fundamentales del pie de rey y del micrómetro.

1.3.2.1. El pie de rey. Partes constituyentes. Tipos

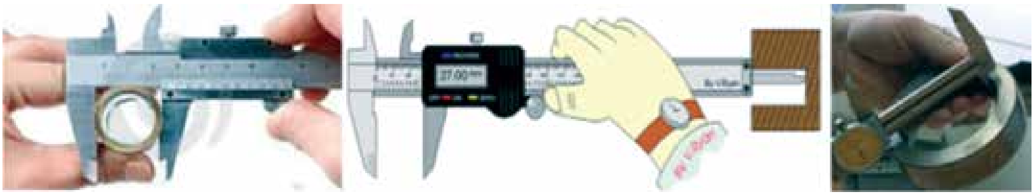
Definición de pie de rey: (se le conoce también con la denominación de calibre deslizante, cartabón de corredera, pie de rey, pie de metro, o simplemente vernier): es un instrumento de medida lineal (utilizado para medir dimensiones de objetos relativamente pequeños) de múltiples usos: mediante el vernier se pueden realizar medidas de longitud: internas, externas y de profundidad (ver fig. 1.8 a 1.11). Pueden venir en apreciaciones de 1/20, 1/50 y 1/100 mm y 1/128 pulgadas. En la escala de las pulgadas tiene divisiones equivalentes a 1/16 de pulgada, y, en su nonio, de 1/128 de pulgada [48]. Como se pueden observar las graduaciones que presenta vienen en los dos sistemas de unidades en la parte frontal, al igual que la regla graduada.

En las fig. 1.8 y 1.9, se observa el uso del pie de rey para la medición de: (a) exteriores, (b) profundidad, (c) interiores.

Fig. 1.8. Utilización del pie de rey en sus tres posibilidades: medición de exteriores, interiores y profundidad

Fuente: https://www.google.com/search?q=pie+de+rey+imagenes&client=firefox-b&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwim6-C4367SAhXDSSYKHYCcCyoQsAQIGg&biw=1600&bih=791

Fig. 1.8. 9. Medición con el pie de rey (a) exteriores,
(b) profundidad, (c) interiores

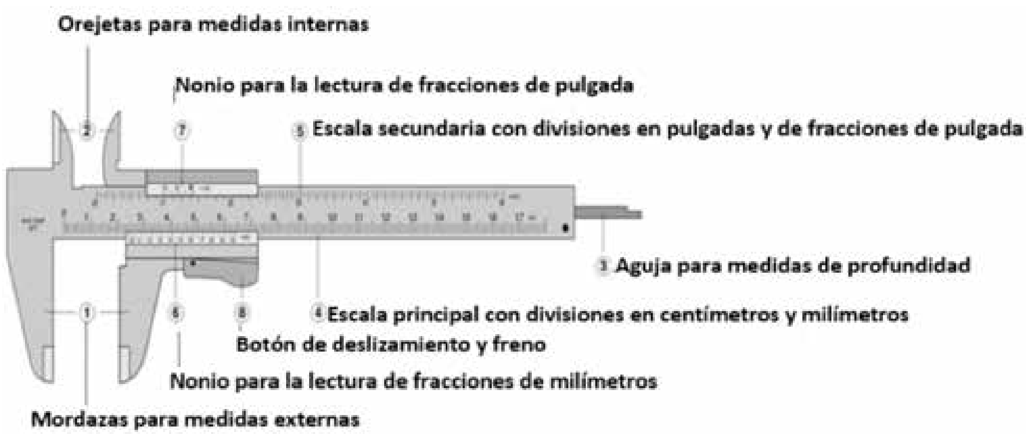


(a) (b) (c)

Fuente: https://www.google.com/search?q=pie+de+rey+imagenes&client=firefox-b&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwim6-C4367SAhXDSSYKHYCcCyoQsAQIGg&biw=1600&bih=791

En la figura 1.10, se señalan las principales partes de un pie de rey.

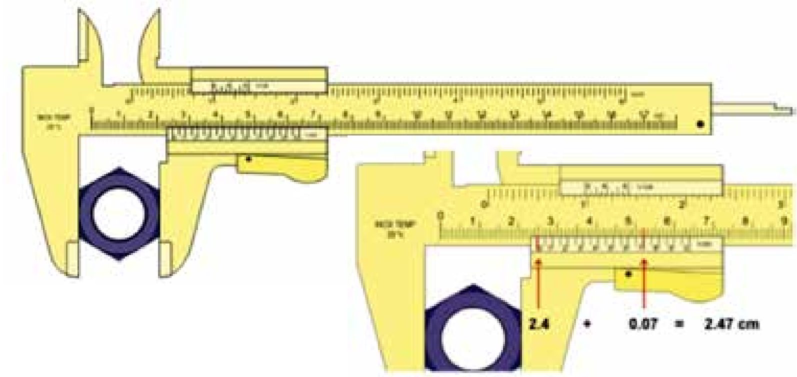
Fig. 1.10. Partes constituyentes del pie de rey



Fuente: Adaptada de: https://mmcdp.webcindario.com/piederey/piederey.htm

A continuación, se presenta un ejemplo gráfico de una medición con el pie de rey. Observe, en la figura 1.11 que después de ajustada la pieza entre las dos mordazas, para mediciones externas, la lectura que arroja la medición es de 2,47 cm, equivalentes a 0,97 pulgadas.

Fig. 1.11. Medición con el pie de rey.



Fuente: https://blogtecnologos.wordpress.com/2

La lectura se obtiene cuando observamos que el nonio inferior (para la lectura de fracciones de milímetros) del vernier coincide con la división 2,4 cm de la regla principal (dividida en centímetros y milímetros); la lectura centesimal se logra al coincidir una división de la regla fija con la división 7 del nonio del vernier; es decir, correspondiente a 0, 07. Sumados ambos valores, se obtiene la lectura final: 2,4 + 0,07 = 2,47 cm. De igual manera la lectura en el sistema inglés se obtuvo al observar que hubo una coincidencia de la primera división del nonio superior (para lectura de fracciones de pulgada en que esté dividido), con la escala secundaria de la regla fija; al segundo valor se llega cuando vemos que una de las divisiones de la escala secundaria coincide con la número 7 de nonio para la lectura de fracciones de pulgadas. No obstante, estos instrumentos de medición, al igual que los micrómetros, que veremos a continuación, posibilitan además la lectura de una forma más rápida y exacta utilizando displays digitales.

1.3.2.2. El micrómetro. Partes constituyentes. Tipos

Definición del micrómetro: también es denominado *tornillo de Palmer*, *calibre Palmer* o simplemente conocido *palmer*. Su funcionamiento está basado en la utilización de un tornillo micrométrico que sirve para apreciar o valorar el tamaño de un objeto con gran precisión y exactitud: en un rango del orden de centésimas o de milésimas de milímetro (0,01 mm y 0,001 mm, respectivamente). Los micrómetros pueden ser de: exteriores, interiores, profundidad y especiales.

En la figura 1.12, se presenta una amplia gama de algunos de los principales tipos de micrómetros.

1.12. Diferentes tipos de micrómetros

Fuente: https://www.google.com/search?q=micrometros+imagenes&client=firefox-b&biw=1600&bih=791&noj=1&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwiAmqbT5q7SAhWFNiYKHVWiAhoQsAQIGg

¿Cómo realizar una medición utilizando el micrómetro? Pero, antes de pasar a ver este importante aspecto, veamos sus partes constituyentes. En la figura 1.13, se puede apreciar un micrómetro con sus partes constituyentes.

Las principales partes constituyentes de un micrómetro son: *cuerpo*: armazón del micrómetro; suele tener unas plaquitas de aislante térmico para evitar la variación de medida por dilatación; *tope*: determina el punto cero de la medida; suele ser de algún material duro (como acero o hierro) para evitar el desgaste así como para optimizar la medida; la *espiga*: elemento móvil que determina la lectura del micrómetro; la punta suele también tener la superficie en metal duro para evitar desgaste; *palanca de fijación*: que permite bloquear el desplazamiento de la espiga; *trinquete*: limita la fuerza ejercida al realizar la medición; *tambor móvil*: solidario con la espiga, en la que está grabada la escala móvil de 50 divisiones; y *tambor fijo*: solidario al cuerpo, donde está grabada la escala fija de 0 a 25 mm. El instrumento posee una exactitud de 0,001 mm. La figura 1.13 fue tomada de la fuente *Todo Ingeniería Industrial* y complementada las denominaciones de sus partes constituyentes.

Fig. 1.13. Partes de un micrómetro

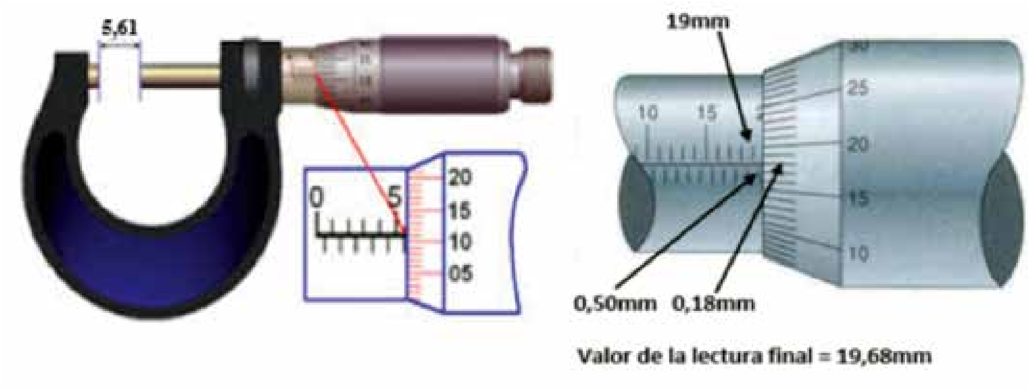
Fuente: https://todoingenieriaindustrial.wordpress.com/metrologia-y-normalizacion/micrometro/

Ahora veamos cómo lograr la lectura:

1. Primeramente se leen los milímetros correspondientes de la escala superior del cilindro exterior
2. Lectura del medio mm de escala inferior: 0,50 mm.
3. Lectura de la escala del tambor giratorio: específica las centésimas de mm.
4. Suma de todos los valores obtenidos.

En la figura 1.14 se pueden ver claramente los valores obtenidos en cada caso. Recuerde siempre, que una vez posesionada la pieza y ajustada la misma accionando el freno del husillo, se debe fijar el tambor mediante el trinquete; solo después de estas operaciones se puede proceder a dar lectura del valor de la medición.

Fig. 1.14. Lectura con el micrómetro: (a) Valor: 5,61 mm; (b) 19,68 mm



(a) (b)

Fuentes: (a) https://www.ecured.cu/Micr%C3%B3metro_(instrumento). b) Adaptada de https://www.studocu.com/es/document/universidade-da-coruna/dibujo-tecnico/trabajo-tutorial/practica7/2414113/view

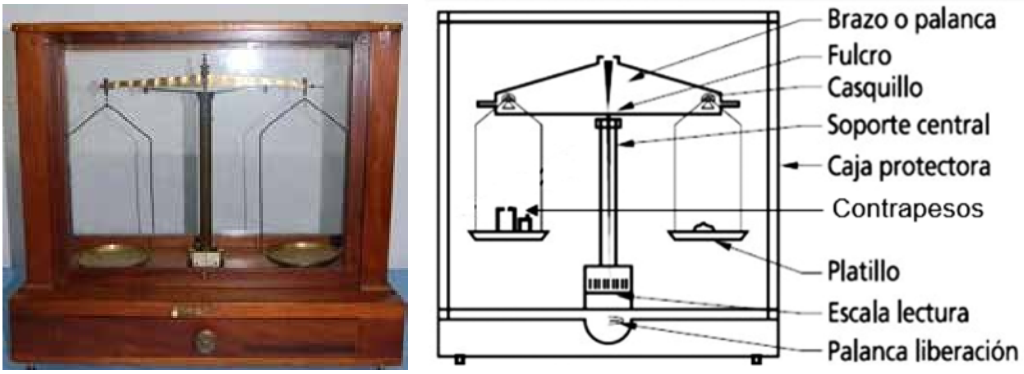
1.3.3. Instrumentos de medición de cantidad de masa

El instrumento que usualmente se utiliza para la medición de la cantidad de masa se conoce como balanza. Las balanzas convencionales están constituidas por una palanca de brazos iguales que, mediante el establecimiento de una situación de equilibrio entre los pesos de dos cuerpos, permite comparar masas.

El rango de medida y precisión de una balanza puede variar desde varios kilogramos (con precisión de gramos), en balanzas industriales y comerciales; hasta unos gramos (con precisión de miligramos) en balanzas de laboratorio.

En la figura 1.15, se puede apreciar una balanza de laboratorio, estas balanzas, normalmente, están protegidas por una caja o cubierta que las aísla del medio exterior cuando no están en uso.

Fig. 1.15. Balanza: (a) Colocada en su urna o caja protectora;
(b) Partes constituyentes de una balanza convencional de laboratorio



(a) (b)

Fuente: (a) https://www.todocoleccion.net/antiguedades-tecnicas/balanza-precision-urna-cristal-madera-1940~x132898238#sobre_el_lote. (b) https://como-funciona.co/una-balanza/

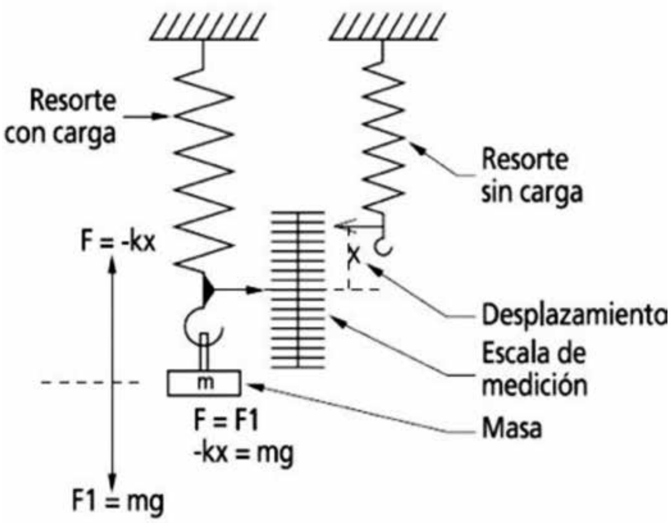
En la figura 1.16 se presentan algunas de las balanzas comerciales más comúnmente usadas.

Fig. 1.16. Diferentes tipos de balanzas de uso comercial

https://www.google.com/search?q=imagen+fotos+balanza&tbm=isch&ved=2ahUKEwim9PCjloHwAhVueDABHQUtBlYQ2-cCegQIABAA&oq=imagen+fotos

En la figura 1.17, se presenta un ingenioso método para determinar la masa de un cuerpo, donde se establece un estado de equilibrio entre la fuerza resistiva a la deformación del muelle y el peso del cuerpo.

Fig. 1.17. Representación gráfica de un sencillo método para determinar la masa de un cuerpo



Fuente: https://www.ingmecafenix.com/medicion/balanza/

1.3.4. Instrumentos de medición de presión

El manómetro es un instrumento de medición de presión, de uso muy frecuente en la industria y laboratorios. Es utilizado para la medición de la presión de fluidos (líquidos o gases) en circuitos cerrados. Se dice que los manómetros miden la presión relativa, ya que miden la diferencia entre la presión real o absoluta y la presión atmosférica, llamándose a este valor presión manométrica. Lo que realmente hacen es comparar la presión atmosférica (la de fuera) con la de dentro del circuito por donde circula el fluido.

Las unidades de presión utilizadas son muy variadas: en el Sistema Internacional de Unidades (SI), la unidad es el pascal (Pa); en la rama, sector o industria química se usa el mm de Hg (conocido también como "*torr*": en honor al insigne físico matemático italiano Torricelli) y la atmósfera (atm). En las figuras 1.18, 1.19

y 1.20 se presentan diferentes tipos de manómetros, con escala en bar, psi y combinados (bar-psi) respectivamente. Observe además el rango alto de prestaciones que pueden brindar; lógicamente, aquellos manómetros utilizados para la medición de pequeñas presiones requieren una mayor exactitud. *1 bar = 14,5030 psi.*

Fig. 1.18. Diferentes tipos de manómetros con escala en bar

Fuente: https://www.google.com/search?q=foto+imagen+man%C3%B3metros+con+escala+en+bar&tbm=isch&ved=2ahUKEwja5vWQmYHwAhVZmIQIHe8jBlMQ2-cCegQIABAA&oq=foto+imagen+man%C3%B3metros+con+escala+en+bar&gs_lcp=CgNpbWcQA1DTIljTImC5KWgAcAB4AIABpgGIAaYBkgEDMC4xmAEAoAEBqgELZ3dzLXdpei1pbWfAAQE&sclient=img&ei=brB4YNr3C9mwkvQP78eYmAU&bih=878&biw=1787&client=firefox-b-d

Fig. 1.19. Diferentes tipos de manómetros con escala en psi

Fuente: Tomado de: https://www.google.com/search?q=foto+imagen+man%C3%B3metros+con+escala+en+psi&tbm=isch&ved=2ahUKEwjR0tqVmYHwAhXVh4QIHWtTCFQQ2-cCegQIABAA&oq=foto+imagen+man%C3%B3metros+con+escala+en+psi&gs_lcp=CgNpbWcQA1Cw0wZY3dYGYJbbBmgAcAB4AIAB2wGIAbwEkgEFMC4yLjGYAQCgAQGqAQtnd3Mtd2l6LWltZ8ABAQ&sclient=img&ei=eLB4YNG2DtWPkvQP66ahoAU&bih=878&biw=1787&client=firefox-b-d

1.20. Diferentes tipos de manómetros con escala en psi y bar

Fuente: Tomado de: https://www.google.com/search?q=foto+imagen+man%C3%B3metros+con+escala+en+psi&tbm=isch&ved=2ahUKEwjR0tqVmYHwAhXVh4QIHWtTCFQQ2-cCegQIABAA&oq=foto+imagen+man%C3%B3metros+con+escala+en+psi&gs_lcp=CgNpbWcQA1Cw0wZY3dYGYJbbBmgAcAB4AIAB2wGIAbwEkgEFMC4yLjGYAQCgAQGqAQtnd3Mtd2l6LWltZ8ABAQ&sclient=img&ei=eLB4YNG2DtWPkvQP66ahoAU&bih=878&biw=1787&client=firefox-b-d

1.3.5. Instrumentos de medición de temperatura

El termómetro, instrumento de inestimable valor, es un instrumento de medición de la temperatura que funciona bajo el principio de la dilatación; por ello, se requiere del uso de materiales con un elevado coeficiente de dilatación de modo que, con el aumento de la temperatura, la dilatación del material utilizado permita una fácil lectura del valor obtenido [49]. Galileo Galilei podría considerarse el creador del predecesor del termómetro: "Consistía en un tubo de vidrio que terminaba con una esfera en su parte superior que se sumergía dentro de un líquido mezcla de alcohol y agua. Al calentar el agua, esta comenzaba a subir por el tubo […] Sanctorius Sanctorius incorporó una graduación numérica al instrumento de Galilei, con lo que surgió el termómetro" [49].

La escala más utilizada en la gran mayoría de los países es la escala *centígrada*; denominación tomada del apellido de su creador: Anders Celsius.(1.11)

Otras escalas también muy usadas en la fabricación y uso de los termómetros son: la Fahrenheit (unidad de temperatura propuesta por Gabriel Fahrenheit(1.12) en 1724) y la Kelvin o *temperatura absoluta*(1.13) (cuyo uso se remite casi exclusivamente a los laboratorios: se corresponde con una propiedad intrínseca de la materia).

(1.11) Anders Celsius: "(Uppsala, Suecia, 1701-id., 1744) Físico y astrónomo sueco, creador de la escala termométrica que lleva su nombre. Anders Celsius fue, junto con Emanuel Swedenborg, Carl von Linné y Carl Wilhelm Scheele, una de las destacadas figuras del círculo de grandes científicos que introdujeron en Suecia las nuevas tendencias de las ciencias naturales, la investigación experimental y la visión newtoniana del mundo" (http://www.biografiasyvidas.com/biografia/c/celsius.htm).

(1.12) Daniel Gabriel Fahrenheit: "Gdansk, 24 de mayo de 1686-La Haya, Holanda, 16 de septiembre de 1736) fue un físico, ingeniero y soplador de vidrio de origen alemán, célebre entre otras cosas por haber desarrollado el termómetro de mercurio y la escala Fahrenheit de temperatura Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Daniel_Gabriel_Fahrenheit

(1.13) Temperatura absoluta: "Es el valor de la temperatura medida con respecto a una escala que comienza en el cero absoluto (0 K o – 273,15 °C). Se trata de uno de los principales parámetros empleados en termodinámica y mecánica estadística. En el Sistema Internacional de Unidades se expresa en kelvin, cuyo símbolo es K. William Thomson (Belfast, 1824 - Netherhall, 1907), físico y matemático británico. Se le conoce comúnmente como lord Kelvin. Fue quien definió en 1848 la escala absoluta de temperatura basándose en el grado Celsius" [77]

1.3.5.1. Tipos de termómetros más frecuentemente usados

Veamos cómo nos ilustra este aspecto la fuente "Física. Estructura de la materia. Termómetros" [49].

Termómetro de vidrio:

"Tubo de vidrio sellado que contiene un líquido, generalmente mercurio o alcohol, cuyo volumen cambia con la temperatura de manera uniforme. Este cambio de volumen se visualiza en una escala graduada que por lo general está dada en grados Celsius. El termómetro de mercurio fue inventado por Farenheit en el año 1714". En la figura 1.21, se muestran diferentes tipos de termómetros de vidrio.

Fig. 1.21. Diferentes tipos de termómetros de vidrio

Fuente: Tomado de: https://www.google.com/search?sxsrf=ALeKk01JWvoF7DDaaRAxAH0injv8TFb-NuA:1618524159927&source=univ&tbm=isch&q=imagen+foto+termometro+de+vidrio&client=firefox-b-d&sa=X&ved=2ahUKEwiEmPOsoIHwAhWdRTABHbO3BMgQjJkEegQIBRAB&biw=1787&bih=878

Termómetro de resistencia:

Formado por un alambre de platino cuya resistencia eléctrica cambia al variar la temperatura; el alambre de platino está integrado interiormente en el termómetro. En la figura 1.22, se pueden apreciar diferentes tipos de estos termómetros de resistencia.

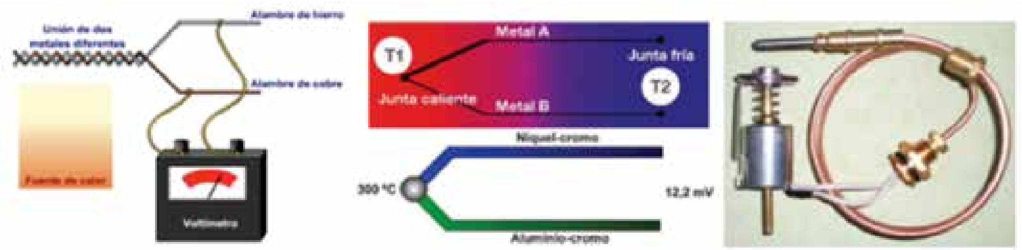
Fig. 1.22. Diferentes tipos de termómetros de resistencia.

Fuente: Tomado de: https://www.google.com/search?q=Term%C3%B3metro+de+resistencia+imagen&client=firefox-b&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwjm0Mn8sbHSAhUEOCYKHZxwDlMQsAQIGg&biw=1600&bih=791

Termopar:

"Dispositivo utilizado para medir temperaturas basado en la fuerza electromotriz que se genera al calentar la soldadura de dos metales distintos". En la figura 1.23, se puede apreciar gráficamente la construcción del termopar.

Fig. 1.23. Termopar



Fuente: https://www.google.com/search?q=imagen+termopar&client=firefox-b&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwi5tfKP5bLSAhVD6SYKHeMVB3oQsAQIGg&biw=1600&bih=791#imgrc=HeoUpRHoirKTFM:

Pirómetro:

Este tipo de termómetro es usado generalmente en la industria siderúrgica, para medir las altas temperaturas en los hornos de fundición. "El término se suele aplicar a aquellos instrumentos capaces de medir temperaturas superiores a los 600 grados celsius. El rango de temperatura de un pirómetro se encuentra entre -50 grados celsius hasta +4 000 grados celsius. Una aplicación típica es la medida de la temperatura de metales incandescentes en molinos de acero o fundiciones" [50, 51]. En la figura 1.24, se pueden apreciar diferentes tipos de estos instrumentos.

Fig. 1.24. Diferentes tipos de pirómetros

Fuente: Tomadas de: https://www.google.com/search?q=imagen+pirometro&client=firefox-b&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwizucSI67LSAhUDKyYKHbcJDmYQsAQIGg&biw=1600&bih=791

Termómetro de lámina bimetálica:

"Formado por dos láminas de metales de coeficientes de dilatación muy distintos y arrollados dejando el de coeficiente más alto en el interior" [52]. Se utiliza generalmente como censor de temperatura en el termohigrógrafo (utilizado en meteorología para registrar tanto temperatura como la humedad relativa). "La referida lámina se suele enrollar en espiral, como muestra la fotografía adjunta, teniendo en uno de los extremos, una aguja indicadora" [52]. En la figura 1.25 (a), se muestra uno de estos instrumentos, con escala centígrada y farenheit y, en la figura 1.25 (b) se puede apreciar la lámina bimetálica arrollada con su aguja indicadora de la temperatura y, en la figura 1.25 (c), se muestra un ejemplo de uno de estos termómetros.

Fig. 1.25. Termómetro de lámina bimetálica. (a) Escalas del termómetro. (b) Vista detalle del enrollado bimetálico. (c) Ejemplo del termómetro.

(a) (b) (c)

Fuente: Tomada de: https://www.google.com/search?q=Term%C3%B3metro+de+l%C3%A1mina+bimet%C3%A1lica&client=firefox-b&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0ahUKEwiD16eg8bLSAhWBZCYKHVvyCfwQsAQIIQ&biw=1600&bih=791#tbm=isch&q=term%C3%B3metro+de+l%C3%A1mina+bimet%C3%A1lica+escala&*&imgrc=0LZvExrt4BpEUM:

1.3.6. Instrumentos de medición de tiempo

Entre los instrumentos más comúnmente utilizados para medir el tiempo se encuentran el *reloj* y el *cronómetro* de los cuales existe una amplísima variedad.

El reloj:

El *reloj* es un instrumento que nos permite medir el paso del tiempo, haciendo uso de diferentes unidades: años, horas, minutos, segundos, etc. Existe una amplia variedad de relojes, tales como: el de sol, el de arena, el analógico, el digital, entre otros.

Cronómetro:

Es un instrumento que sirve para medir fracciones de tiempo, normalmente cortos y con gran precisión segundos, milésimas de segundos, etc.

Existen también otros tipos de instrumentos medición del tiempo —como el reloj atómico— o procedimiento como la *datación radiométrica*(1.14), (proce-

(1.14) *Reloj atómico*: "Un reloj cuyo funcionamiento se basa en la frecuencia de una vibración atómica. Es un tipo de reloj que utiliza una frecuencia de resonancia atómica normal para alimentar su contador. *Datación radiométrica*:

dimiento técnico empleado para determinar la edad absoluta de rocas y minerales).

En la figura 1.26, se pueden apreciar diferentes tipos de relojes, desde el más antiguo, el reloj de arena, hasta los más modernos de uso popular. También se muestran cronómetros. Como un aspecto curioso, sobre el reloj más exacto del mundo, se asegura lo siguiente. "Físicos estadounidenses crean un reloj atómico de estroncio que retrasa o adelanta un segundo cada 15 000 millones de años" [53].

Fig. 1.26. Diferentes tipos de relojes y cronómetros

Fuente: Tomadas de: https://www.google.com/search?sxsrf=ALeKk03G7_bC3RPyMfISLHPnKNPX0p1T-yA:1618524734289&source=univ&tbm=isch&q=foto+relojes+y+cron%C3%B3metros&client=firefox-b-d&-sa=X&ved=2ahUKEwiayOO-ooHwAhUJSzABHZ0wB90QjJkEegQIBRAB&biw=1787&bih=878

es el procedimiento técnico empleado para determinar la edad absoluta de rocas, minerales y restos orgánicos. Permitiendo saber la edad exacta de minerales hasta de 60 000 años" (http://laboratoriobae.blogspot.com/).

1.4. FACTORES DE CONVERSIÓN DE MASA, VOLUMEN Y TEMPERATURA

Existe una muy amplia variedad de tablas con factores para la conversión de las diferentes unidades, ya se esté hablando del Sistema Internacional, el inglés o la conversión entre ambos sistemas. Esto último es de vital importancia en la vida diaria; pues, de no existir las mismas se haría imposible llevar a cabo múltiples transacciones comerciales, procesos de experimentación, etc.

A continuación, en las tablas 1.12 a 1.14, se presenta una reducida muestra acerca de la conversión de unidades en diferentes magnitudes físicas: masa, volumen, presión; así como fórmulas de conversión de temperatura. Para una más amplia información, ver el anexo V: "Tablas de Factores de Conversión".

Tabla 1.12. Factores de conversión para la MASA

1 gramo = 0,035 27 onzas	1 tonelada = 2 204,62 libras
1 libra = 16 onzas	1 gramo = 0,035 onzas
1 kilogramo = 2,205 libras	1 onza = 28,35 gramos
1 libra = 453,6 gramos	1 libra = 0,4536 kilogramo

Tabla 1.13. Factores de conversión para el VOLUMEN

1 litro = 0,264 2 galón	1 onza fluida = 29,57 mililitros
1 galón = 4 cuartos	1 cuarto = 0,946 3 litros
1 galón = 3,785 litros	

Tabla 1.14. Factores de conversión para la PRESIÓN

$\frac{1\ \text{kg}}{\text{cm}^2}$	$= 98\,066\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	= 98,066 kPa
1 Torr	= 1 mm Hg	= 133 Pa
1 bar	= 100 kPa	
1 psi	= 16,894 4 kPa	
1 pul Hg	= 3,377 kPa	

Factores de conversión para la TEMPERATURA

Si bien, en la generalidad de los casos, se acostumbra escribir las ecuaciones de conversión de temperatura como se expresa en (1.18), (1.19) y (1.20), creemos que resulta más acertado hacerlo según las ecuaciones de la (1.21) a la (1.26), teniendo en cuenta en cuenta que las primeras manifiestan inconsistencias dimensionales.

$$°F = \frac{\mathbf{9}*°C}{\mathbf{5}} + 32 \tag{1.10}$$

$$°C = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}(°F - 32\,) \tag{1.11}$$

$$K = °C + 273{,}15 \tag{1.12}$$

Conversión de °C a °F

$$T°F = T°C \times \frac{9\ °F}{5\ °C} + 32\ °F \tag{1.13}$$

Conversión de °C a K

$$TK = T°C \times \frac{1\ K}{1\ °C} + 273\ K \tag{1.14}$$

Conversión de °F a °C

$$T°C = (T°F - 32\ °F) \times \frac{5\ °C}{9\ °F} \tag{1.15}$$

Conversión de °F a K

$$TK = (T°F - 32\ °F) \times \frac{5\ K}{9\ °F} + 273\ K \tag{1.16}$$

Conversión de K a °C

$$T°C = (TK - 273\ K) \times \frac{1\ °C}{1\ K} \tag{1.17}$$

Conversión de K a °F

$$T°\mathrm{F} = (TK - 273\ K) \times \frac{9\ °\mathrm{F}}{5\ K} + 32\ °\mathrm{F} \qquad (1.18)$$

1.5. EJERCICIOS DE APLICACIÓN

En el trabajo con las unidades y sus conversiones, especialmente en la solución de problemas donde se precisan conversiones de múltiplos y submúltiplos de las magnitudes físicas que se deben calcular, así como durante la conversión entre sistemas de unidades diferentes, como el SI y el inglés, las falencias y dificultades que se perciben en el alumnado son demasiado ostensibles. Por ello, se proponen los siguientes ejercicios. Algunos de ellos muy sencillos, pero necesarios, dadas las lagunas de conocimiento que se observan.

Ejercicio 1:

Calcule la capacidad (en m^3) de un recipiente, el cual posee las siguientes medidas: 20 ft de largo, 10 ft de ancho y 5 ft de alto.

Factores de conversión de longitud: 1 ft = 0,304 8 m

Solución:

$$V = L.A.H = 20\ ft.10ft.5ft = 1000\ ft^3$$

$$V = (1000ft^3)\frac{(0{,}3048m)^3}{ft^3} = 28{,}316\ 8\ m^3$$

Ejercicio 2:

Recalcule el VOLUMEN (en m^3, dm^3, cm^3) del recipiente anterior, que contiene agua, y que se encuentra a una altura de 15 m, el cual posee las siguientes medidas: 10 ft de largo, 20 ft de ancho y 15 ft de alto.

<u>Datos</u>:

L = 10 ft

A = 20 ft

H = 15 ft

<u>Factores de conversión de longitud</u>:

1 ft = 0,304 8 m

in = 2,54 cm

<u>Conversión volumen</u>:

$1m^3 = 1\ 000\ 000 = 10^6\ cm^3$

$1m^3 = 1000 = 10^3\ dm^3$

$\boxed{0{,}0283\ \ m^3}$

$$V_{m^3} = (30\,000\,ft^3)\ \frac{(0{,}304\ 8\ m)^3}{ft^3} = 849\ m^3$$

$$V_{dm^3} = 849\ m^3\ \frac{10^3 \cdot dm^3}{1\ m^3} = 849\,000\ dm^3$$

$$V_{cm^3} = 849\ m^3 \ \frac{10^6 \cdot cm^3}{1\ m^3} = 849\,000\,000\ cm^3$$

Ejercicio 3:

Calcule la DENSIDAD (en **kg/m³; kg/dm³; hg/dm³; g/cm³; dag/cm³**) de una sustancia, que posee 10 lb/*f* t³. Dé la respuesta con una aproximación de 10^0.

Factor de <u>conversión de **masa**</u>: 1 lb = 0,4536 kg

Factor de <u>conversión de **longitud**</u>: 1ft = 0,3048 m

$$1\ kg \xrightarrow{10} 1\ hg \xrightarrow{10} 1\ dag \xrightarrow{10} 1\ g \xrightarrow{10} 1\ dg \xrightarrow{10} 1\ cg \xrightarrow{10} 1\ mg$$

Solución:

$$\delta = \frac{m}{V} = \frac{(10\ lb)}{ft^3} \cdot \frac{(0{,}4536\ kg)}{lb} \cdot \frac{(ft^3)}{\underbrace{(0{,}3048\ m)^3}_{\boxed{0{,}0283\ m^3}}} = 160\ \frac{kg}{m^3}$$

$$\delta = 160\ \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m^3}{10^3\ dm^3} = 0{,}160\ \frac{kg}{dm^3}$$

$$\delta = 0{,}160\ \frac{kg}{dm^3} \cdot \frac{10\ hg}{10\ kg} = 1{,}60\ \frac{hg}{dm^3}$$

$$\delta = 1{,}60\ \frac{hg}{dm^3} \cdot \frac{1\ dm^3}{10^3\ cm^3} \cdot \frac{100\ g}{1\ hg} = 0{,}16\ \frac{g}{cm^3}$$

$$\delta = 0{,}16\ \frac{g}{cm^3} \cdot \frac{dag}{10\ g} = 0{,}016\ \frac{dag}{cm^3}$$

Ejercicio 4:

Calcule la velocidad del fluido (en **m/s; dm/s; cm/s; m/min; m/h; y km/h**;), si el mismo se desplaza a 10 ft/s. Dé la respuesta con una aproximación de 10^{-3}.

Solución:

$$v = 1{,}60\ \frac{10\, ft}{\text{s}} \cdot \frac{0{,}3048\ \text{m}}{1\, ft} = 3{,}048\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 3{,}048\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{100\ \text{dm}}{1\ \text{m}} = 30{,}48\ \frac{\text{dm}}{\text{s}}$$

$$v = 30{,}48\ \frac{\text{dm}}{\text{s}} \cdot \frac{10\ \text{cm}}{1\ \text{dm}} = 304{,}8\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$v = 3{,}048\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} = 182{,}88\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

$$v = 182{,}88\ \frac{\text{m}}{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{min}}{\text{h}} = 10\,972{,}80\ \frac{\text{m}}{\text{h}}$$

$$v = 3{,}048\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \text{h}} = 10\,972{,}80\ \frac{\text{m}}{\text{h}}$$

$$v = 10\,972{,}880\ \frac{\text{m}}{\text{h}} \cdot \frac{\text{km}}{10^3\ \text{m}} = 10\,97\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ejercicio 5:

Se desea hacer una “torre de líquidos” refiriendo sus densidades al sistema inglés (lb/in3)

a) ¿Cuáles serían los valores respectivos, si se conoce que las densidades de los tres líquidos son: agua = 1000 g/cm^3, aceite mineral = 0,910 g/cm^3 y alcohol = 0,790 g/cm3?

b) ¿Cuál sería el orden que ocuparía cada líquido dentro del recipiente, atendiendo a sus densidades?

Factores de conversión: 1in = 2,54 cm

1lb = 453,59 g

Solución:

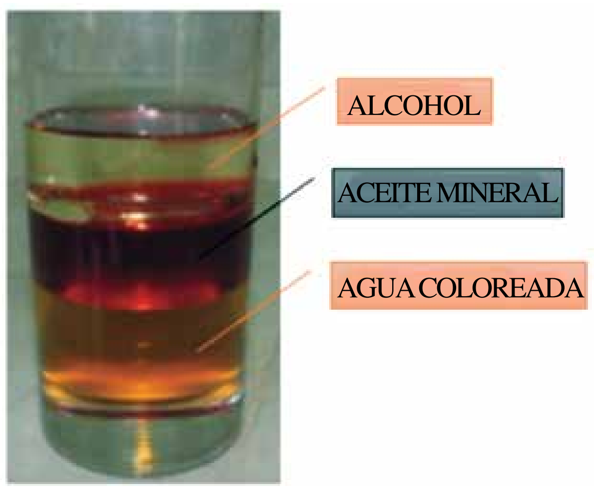
a) Conversión de densidades del SI al inglés.

$$\rho Alcohol = \frac{(0{,}790\ g)}{cm^3} \cdot \frac{lb}{453{,}59\ g} \cdot \frac{(2{,}54\ cm)^3}{(in)^3} = 0{,}028540 \frac{lb}{(in^3)}$$

$$\rho Aceite\ mineral = \frac{(0{,}910\ g)}{cm^3} \cdot \frac{lb}{453{,}59\ g} \cdot \frac{(2{,}54\ cm)^3}{(in)^3} = 0{,}032876 \frac{lb}{(in^3)}$$

$$\rho Agua\ coloreada = \frac{(1{,}000\ g)}{cm^3} \frac{lb}{453{,}59\ g} \frac{(2{,}54\ cm)^3}{(in)^3} = 0{,}036127 \frac{lb}{(in^3)}$$

b) Lugar que ocuparía cada líquido en el recipiente.



Ejercicio 6:

¿Cuántos litros de agua hay en un lago de un kilómetro cúbico de volumen, si este está totalmente lleno? ¿Cuántos pies cúbicos?

Solución:

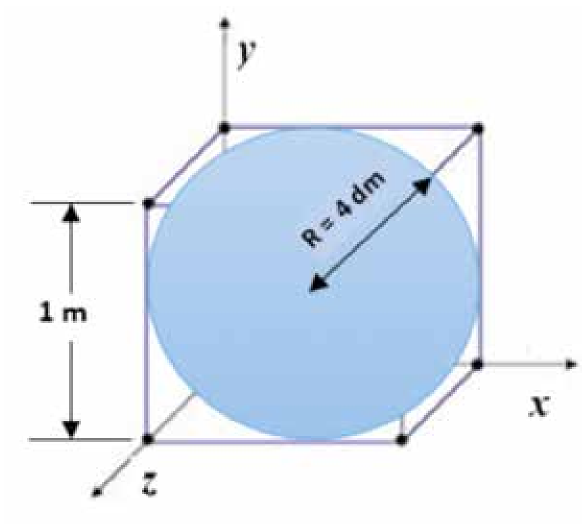
$$L_{agua} = 1\ km^3 . \frac{10^9\ m^3}{1\ km^3} . \frac{10^3 L}{1\ m^3} = 10^{12}\ L$$

$$(ft)^3_{agua} = 1\ km^3 . \frac{10^9\ m^3}{1\ km^3} . \frac{(3{,}2808\ ft)^3}{m^3} = \frac{10^9\ m^3 . 35{,}3146\ ft^3}{m^3} = 35{,}3146 . 10^9\ ft^3$$

Ejercicio 7:

Diga si una esfera sólida de 4 dm de radio cabe en un cubo vacío de 1 m de lado.

Factor de conversión: 1 m = 10^2 cm



Solución:

$$Diámetro_{Esfera} = D = 8\ dm \times \frac{10\ cm}{1\ dm} = 80\ cm.$$

$$Lado_{Cubo} = L = 1\ m \times \frac{100\ cm}{1\ m} = 100\ cm.$$

R/ La esfera sólida de radio igual a cuatro decímetros (r = 4 dm) cabe perfectamente en el cubo vacío de lado igual a un metro (L = 1 m).

Ejercicio 8:

Si el agua tiene una densidad de 0,997 g/mL, el alcohol etílico (etanol) de 789 kg/m^3 y el aceite de 57,43 lb/ft^3; ordene de mayor a menor, quién posee las mayores densidades. Expresar la respuesta en kg/dm^3

Factores de conversión: 1 kg = 103 g

1 kg = 2,2 lb

1 m = 10 dm

1 m = 3,280 8 ft

Solución:

$$\rho_{agua} = 0{,}997\ \frac{g}{mL} . \frac{1\ kg}{10^3\ g} . \frac{10^3\ mL}{1\ L} . \frac{1\ L}{1\ dm^3} . = 0{,}997\ \frac{kg}{dm^3}$$

$$\rho_{etanol} = 789\ \frac{kg}{m^3} . \frac{(1\ m)^3}{(10\ dm)^3} = 789\ \frac{kg}{m^3} . \frac{1m^3}{10^3\ dm^3} = 0{,}789\ \frac{kg}{dm^3}$$

$$\rho_{aceite} = \frac{57{,}431\ lb}{ft^3} . \frac{(3{,}2808\ ft)^3}{(m)^3} . \frac{1\ kg}{2{,}2lb} . \frac{1\ m^3}{10^3 dm^3} = 0{,}920\ \frac{kg}{dm^3}$$

Según los resultados obtenidos se puede apreciar que:

$\rho_{agua} > \rho_{aceite} > \rho_{etanol}$

Ejercicio 9:

El largo de un rectángulo es 1,5 m y su ancho 85 cm. Halle el perímetro del rectángulo en centímetros (cm) y en pulgada (in).

Factores de conversión: 1 m = 100 cm

1 in = 2,54 cm

Solución:

Conversión de los lados del rectángulo a cm:

$$Largo_{Rectángulo} = L = 1{,}5\ m \times \frac{100\ cm}{1\ m} = 150\ cm$$

Cálculo del perímetro del rectángulo:

$$Perímetro_{Rectángulo} = P = 2 \times Largo + 2 \times Ancho$$

$$\begin{aligned} P_{cm} &= 2 \times 150\ cm + 2 \times 85\ cm \\ &= 300\ cm + 170\ cm \\ &= 470\ cm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{in} &= 470\ cm. \frac{1 in}{2{,}54 cm} \\ &= 185{,}039\ in \end{aligned}$$

Ejercicio 10:

Complete la siguiente tabla, que indica las temperaturas registradas en un día para algunas ciudades del mundo:

Ciudad	T en Celsius (°C)	T en Farenheit (°F)	T en Kelvin (K)
México D.F	25		
Londres			273
El Cairo		70	
Toronto			240
Madrid	– 6		
Toledo		20	
Atenas	4		

Temperatura de la ciudad México DF en °F y K

$$T°F = T°C \times \frac{9\ °F}{5\ °C} + 32\ °F$$

$$= 25\ °C \times \frac{9\ °F}{5\ °C} + 32\ °F$$

$$= 77\ °F$$

$$TK = T°C \times \frac{1\ K}{1\ °C} + 273\ K$$

$$= 25\ °C \times \frac{1\ K}{1\ °C} + 273\ K$$

$$= 298\ K$$

Temperatura de la ciudad Londres en °C y °F

$$T°C = (TK - 273\ K) \times \frac{1\ °C}{1\ K}$$

$$= (273\ K - 273\ K) \times \frac{1\ °C}{1\ K}$$

$$= 0\ °C$$

$$T°F = (TK - 273\ K) \times \frac{9\ °F}{5\ K} + 32\ °F$$

$$= (273\ K - 273\ K) \times \frac{9\ °F}{5\ K} + 32\ °F$$

$$= 32\ °F$$

Temperatura de la ciudad El Cairo en °C y K

$$T°C \ = (T°F - 32\ °F) \times \frac{5\ °C}{9\ °F}$$

$$= (70\ °F - 32\ °F) \times \frac{5\ °C}{9\ °F}$$

$$= 21{,}1\ °C$$

$$TK \ = (T°F - 32\ °F) \times \frac{5\ K}{9\ °F} + 273\ K$$

$$= (70\ °F - 32\ °F) \times \frac{5\ K}{9\ °F} + 273\ K$$

$$= 294{,}1\ K$$

Temperatura de la ciudad Toronto en °C y °F

$$T°C \ = (TK - 273\ K) \times \frac{1\ °C}{1\ K}$$

$$= (240\ K - 273\ K) \times \frac{1\ °C}{1\ K}$$

$$= -33\ °C$$

$$T°F \ = (TK - 273\ K) \times \frac{9\ °F}{5\ K} + 32\ °F$$

$$= (240\ K - 273\ K) \times \frac{9\ °F}{5\ K} + 32\ °F$$

$$= -27{,}4\ °F$$

Temperatura de la ciudad Madrid en ºF y K

$$
\begin{aligned}
T°\mathrm{F} &= T°\mathrm{C} \times \frac{9\ °\mathrm{F}}{5\ °\mathrm{C}} + 32\ °\mathrm{F} \\
&= -6\ °\mathrm{C} \times \frac{9\ °\mathrm{F}}{5\ °\mathrm{C}} + 32\ °\mathrm{F} \\
&= 21{,}2\ °\mathrm{F}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
TK &= T°\mathrm{C} \times \frac{1\ K}{1\ °\mathrm{C}} + 273\ K \\
&= -6\ °\mathrm{C} \times \frac{1\ K}{1\ °\mathrm{C}} + 273\ K \\
&= 267\ K
\end{aligned}
$$

Temperatura de la ciudad Toledo en ºC y K

$$
\begin{aligned}
T°\mathrm{C} &= (T°\mathrm{F} - 32\ °\mathrm{F}) \times \frac{5\ °\mathrm{C}}{9\ °\mathrm{F}} \\
&= (20\ °\mathrm{F} - 32\ °\mathrm{F}) \times \frac{5\ °\mathrm{C}}{9\ °\mathrm{F}} \\
&= -\ 6{,}7\ °\mathrm{C}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
TK &= (T°\mathrm{F} - 32\ °\mathrm{F}) \times \frac{5\ K}{9\ °\mathrm{F}} + 273\ K \\
&= (20\ °\mathrm{F} - 32\ °\mathrm{F}) \times \frac{5\ K}{9\ °\mathrm{F}} + 273\ K \\
&= 266{,}3\ K
\end{aligned}
$$

Temperatura de la ciudad México D.F en ºF y K

$$
\begin{aligned}
T°\mathrm{F} &= T°\mathrm{C} \times \frac{9\ °\mathrm{F}}{5\ °\mathrm{C}} + 32\ °\mathrm{F} \\
&= 4\ °\mathrm{C} \times \frac{9\ °\mathrm{F}}{5\ °\mathrm{C}} + 32\ °\mathrm{F} \\
&= 39{,}2\ °\mathrm{F}
\end{aligned}
$$

$$TK = T°\mathrm{C} \times \frac{1\ K}{1\ °\mathrm{C}} + 273\ K$$

$$= 4\ °\mathrm{C} \times \frac{1\ K}{1\ °\mathrm{C}} + 273\ K$$

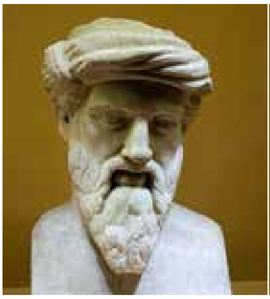
$$= 277\ K$$

R/

Ciudad	T en Celsius (°C)	T en Farenheit (°F)	T en Kelvin (K)
México D.F	25	**77**	**298**
Londres	**0**	**32**	273
El Cairo	**21,1**	70	**294,1**
Toronto	**–33**	**–27,4**	240
Madrid	– 6	**21,2**	**267**
Toledo	**– 6,7**	20	**266,3**
Atenas	4	**39,2**	**277**

CAPÍTULO II
TEOREMA DE PITÁGORAS Y ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

Ing. Marcelo Nelson Navarro Ojeda, PhD
Ing. Nadia Aimé González, MsC



No digas pocas cosas en muchas palabras, sino muchas cosas en pocas palabras.
Pitágoras

INTRODUCCIÓN

En el capítulo I, fue tratado un tema de decisiva importancia en la rama de la física, así como para las demás ciencias exactas, la técnica y la tecnología: *las mediciones, sistemas de unidades e instrumentos de medición*. En esta ocasión, continuaremos con otro tema que, por su notoriedad y pertinencia, especialmente dentro del vastísimo campo de aplicación en las ingenierías, ocupa un lugar de marcado interés: el estudio de la trigonometría.

De este modo, las mediciones, junto a la trigonometría y la física vectorial, se convierten en piedra angular para la buena compresión, solución de problemas y poder contar con herramientas físico-matemáticas de incalculable valor para dar solución y llegar a una cabal compresión de los innumerables fenómenos que se suscitan en el ámbito natural de la física y en el contexto de las ciencias aplicadas: la ingeniería.

No pocas veces hemos podido constatar que una cantidad nada despreciable de estudiantes de ingeniería, si bien se les imparte el Álgebra Lineal y la Geometría Analítica, como asignaturas básicas de la malla curricular, no todos poseen las destrezas necesarias para extrapolar estos conocimientos en la correcta solución de problemas asociados a la praxis profesional. Se encuentran con invisibles barreras de contención que les frenan, que les imposibilitan ver la fácil solución de los problemas utilizando estas utilísimas herramientas matemáticas.

En este capítulo, solo pretendemos dar una visión general y lo más práctica posible del Teorema de Pitágoras, los rudimentos esenciales de la Trigonometría, que permitan la mejor comprensión de los capítulos subsiguientes, toda vez que constituyen base imprescindible para los mismos.

Las razones trigonométricas se utilizan, fundamentalmente, para la solución de triángulos rectángulos (triángulo que posee un ángulo de 90º y la suma total de los tres ángulos interiores es igual a 180º).

La finalidad de las razones o funciones trigonométricas, y auxiliados del Teorema de Pitágoras, es llegar a conocer los valores de los lados y ángulos del referido triángulo rectángulo; ambos, constituyen dos potentes herramientas para resolver triángulos rectángulos, presentes en múltiples problemas en las diferentes ramas de la ingeniería; pues, una simple figura geométrica se convierte, en infinidad de veces, en un triángulo de vectores: fuerza, velocidad, aceleración, etc.

2.1. TEOREMA DE PITÁGORAS

2.1.1. Definición del Teorema de Pitágoras[2.1]

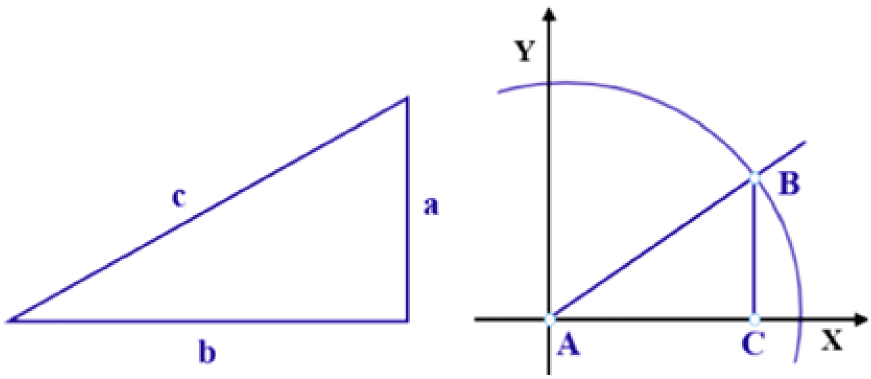
El cuadrado de la hipotenusa, en los triángulos rectángulos, es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

(2.1) Pitágoras de Samos: (582 a.C.-507 a.C.) "Fue un filósofo y matemático de origen griego. A diferencia de lo que puede llegar a suponerse, Pitágoras no fue quien creó el teorema que lleva su nombre. Dicho teorema fue desarrollado y aplicado mucho tiempo antes en Babilonia y la India; sin embargo, la escuela pitagórica (y no el propio Pitágoras) fue pionera en hallar una demostración formal para este teorema" (https://definicion.de/teorema-de-pitagoras/).

La enorme importancia que posee este milenario teorema, en el ámbito de las matemáticas y las ingenierías, radica en que nos permite calcular la medida de uno cualquiera de los lados de un triángulo rectángulo, en función de la medida de los otros dos restantes.

En la notación de los segmentos de recta que conforman un triángulo rectángulo se puede proceder de diferente manera: o bien utilizando letras minúsculas para nombrar cada lado o empleando letras mayúsculas para denotar el principio y fin de cada segmento (ver fig. 2.1).

Fig. 2.1. Representación gráfica del triángulo en un sistema de coordenadas cartesianas. (a) Notación del triángulo utilizando letras minúsculas. (b) Notación del triángulo ABC circunscrito en un arco de circunferencia.



(a) (b)

2.1.2. Fórmulas para determinar los lados del triángulo rectángulo

2.1.2.1. Fórmulas

Según el enunciado anterior, y observando la fig. 2.1, podemos determinar cada lado del triángulo rectángulo; a través de las ecuaciones de la (2.1) a la (2.6), según sea el caso y el tipo de notación.

a) Hipotenusa:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{2.1}$$

$$AB^2 = BC^2 + AB^2$$

$$AB = \sqrt{BC^2 + AB^2} \tag{2.2}$$

b) Cateto opuesto

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \tag{2.3}$$

$$BC^2 = AB^2 - AC^2$$

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} \tag{2.4}$$

c) Cateto adyacente

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \tag{2.5}$$

$$AC^2 = AC^2 - BC^2$$

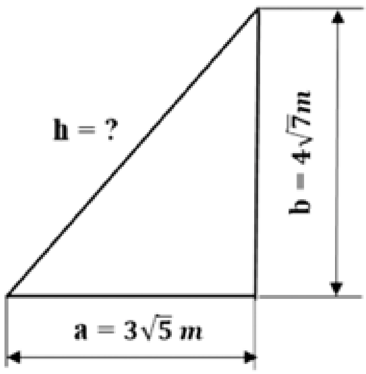
$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} \tag{2.6}$$

Como se pudo observar, resulta sumamente fácil determinar cualquiera de los lados de un triángulo rectángulo utilizando el Teorema de Pitágoras.

2.1.3. Ejercicios sobre el Teorema de Pitágoras

Ejercicio 1:

Calcular la hipotenusa de un triángulo cuyos lados miden $3\sqrt{5}$ m y $4\sqrt{7}$ m respectivamente



Solución:

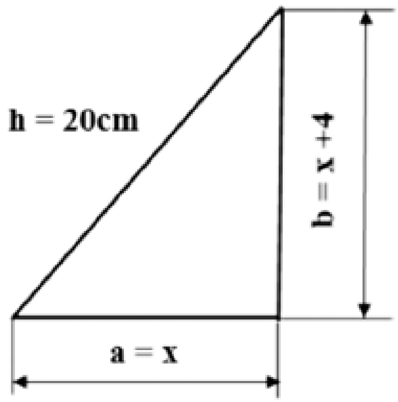
Aplicando la ecuación (2.1), se obtiene el valor deseado.

$$h = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(3\sqrt{5}\,m)^2 + (4\sqrt{7}\,m)^2} = \sqrt{[(9).(5) + (16).(7)]\,m^2} = \sqrt{157\,m^2}$$

$$h = 12{,}53\,m$$

Ejercicio 2:

Un triángulo rectángulo posee las medidas que muestra la figura. Determine la longitud de los catetos "a" y "b"



Solución:

Antecedentes: Fórmula de Pitágoras (1) y el Cuadrado de un Binomio (2):

$c^2 = a^2 + b^2$ (1)

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (2)

Utilizando las expresiones (1) y (2) y simplificando obtendremos la expresión (3):

$20^2 = x^2 + (x+4)^2$

$400 = x^2 + (x^2 + 8x + 16)$

$2x^2 + 8x - 384 = 0$ (3)

Ahora será muy fácil obtener el valor de “x” resolviendo la ecuación de segundo grado (3), a partir de las expresiones (4) y (5).

Antecedentes:

$ax^2 + bx + c = 0$, donde el coeficiente cuadrático: $a \neq 0$ (4)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{5}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - (4).(2).(-384)}}{(2).(2)}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 3072}}{4}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{3136}}{4}$$

$$x = \frac{-8 \pm 56}{4} = \{\begin{matrix} 12 \\ -16 \end{matrix}\}$$

$$x = 11$$

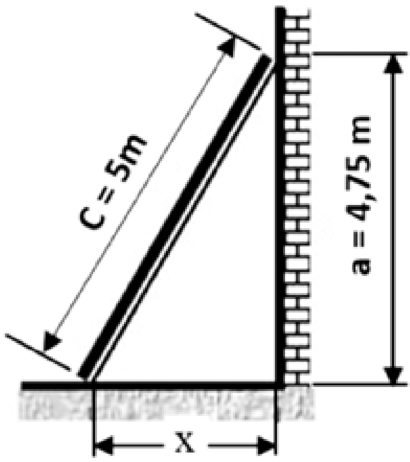
De lo que resulta, que el valor de los catetos será:

a = 11

b = 16

Ejercicio 3:

¿Cómo llegar a conocer la distancia a que se halla el pie de una escalera, cuya longitud es de 5 metros, apoyada contra una pared en el suelo horizontal, si la proyección de la misma contra la pared alcanza el valor de 4,75 metros?



Solución:

Recurriendo a la conocida fórmula de Pitágoras (ver ecuación (1)), podemos plantear la solución del problema de la siguiente manera:

$$c^2 = a^2 + x^2 \tag{1}$$

$$5^2 = 4{,}75^2 + x^2$$

$$25 = 22{,}5625 + x^2$$

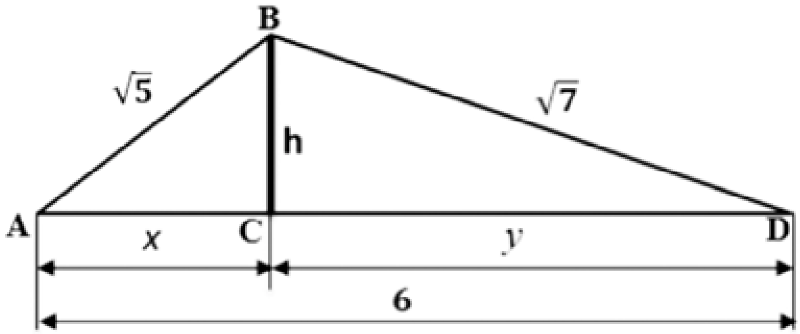
$$x^2 = 25 - 22{,}562\ 5$$

$$x = \sqrt{2{,}4375}$$

$$x = 1{,}56 \text{ m}$$

Ejercicio 4:

Determinar el valor de la base del triángulo rectángulo ABC: distancia AC, según la figura que se presenta a continuación:



Solución:

Aplicando Pitágoras en los respectivos triángulos rectángulos que se muestran en la figura anterior, se obtienen las ecuaciones (2) y (4):

Triángulo ABC

$$(\sqrt{5})^2 = h^2 + x^2 \tag{1}$$

$$5 = h^2 + x^2 \tag{2}$$

Triángulo BCD

$$(\sqrt{7})^2 = h^2 + y^2 \tag{3}$$

$$7 = h^2 + y^2 \tag{4}$$

No conocemos el valor de cada base en particular de los referidos triángulos, pero síi conocemos su suma, de donde se obtiene la ecuación Ec. (5).

$$6 = x + y \tag{5}$$

Conociendo que la suma de las bases de los triángulos es igual a 6, y tomando las Ec.ecuaciones (2) y (4), obtendremos un sistema de tres ecuaciones, con dos incógnitas, como la que se muestra a continuación:

$$\left.\begin{aligned} 5 &= h^2 + x^2 \\ 7 &= h^2 + y^2 \\ 6 &= x + y \end{aligned}\right\}$$

Despejamos "y" en la Ec.ecuación (5):

$$y = 6 - x \tag{6}$$

Sustituimos "y" en la Ec.ecuación (4)

$$7 = h^2 + (6 - x)^2 \tag{7}$$

Aplicamos la fórmula del Binomio de Newton: Ec.ecuación (8) en la Ec.ecuación (7), ya que tenemos una resta al cuadrado, resultando de la que resulta la eEcuación. (9) y (10):

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \tag{8}$$

$$7= h^2 + [x^2 + 6^2 - (2) \cdot (6)x] \tag{9}$$

$$7 = h^2 + 36 + x^2 - 12x \tag{10}$$

Despejamos h^2 en las ecuaciones: (2) y (10), obteniéndose y se obtienen las ecuaciones. (11), (12) y (13) respectivamente.

$$h^2 = 5 - x^2 \tag{11}$$

$$h^2 = 7 - 36 - x^2 + 12x \tag{12}$$

$$h^2 = -29 - x^2 + 12x \tag{13}$$

Igualando las ecuaciones (11) y (13) resulta:

$5 - x^2 = -29 - x^2 + 12x$

Agrupando términos semejantes y efectuando:

$5 - x^2 + x^2 + 29 = 12x$

$24 = 12x$

$x = 2$

2.2. ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

2.2.1. Introducción a la trigonometría. El triángulo rectángulo. Los conceptos de semejanza, razón, ángulo y su medida

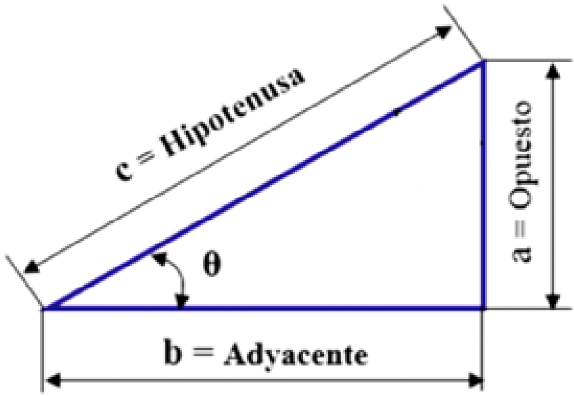
Ante todo, preguntémonos: ¿qué es la trigonometría?

Diremos que la *trigonometría* ("unión de *trigonon* que equivale a "triángulo", *metron* que puede definirse como "medida" y *tria* que es sinónimo de "tres") [54] es una rama de las matemáticas, cuya etimología —origen o procedencia de la palabra— está directamente relacionada con la medición de triángulos. O dicho de otra forma: la trigonometría es aquella disciplina que se encarga del estudio de las razones o funciones trigonométricas; dentro de las cuales se encuentran las funciones seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente. También es conocida como: la rama de las matemáticas dedicada al estudio de la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo y una circunferencia.

Recordamos que un triángulo es rectángulo cuando tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90 grados ó $\pi/2$ radianes.

Pero, para comprender mejor lo antes expuesto, debemos conocer el nombre que se le ha dado a cada lado de un triángulo rectángulo, en función de uno de sus ángulos. Esto nos ayudará a comprender más rápidamente los anteriores conceptos. La figura 2.3 muestra el nombre dado a cada lado.

Fig. 2.2. Nombre de los lados de un triángulo rectángulo



El concepto de **semejanza** corresponde a figuras de igual forma, pero no necesariamente de igual tamaño; es decir, pueden ser figuras paramétricas vistas desde una concepción ingenieril. Dos triángulos son semejantes si tienen los mismos ángulos, debido a que, si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, los terceros también son iguales.

Por otra parte, el triángulo isósceles es aquel que tiene dos lados iguales; otros autores prefieren definirlos como triángulos que tienen al menos dos lados iguales, lo que hace que los "triángulos equiláteros" (con tres lados iguales) sean un caso especial de triángulos isósceles.

Razón o relación de dos cantidades es el resultado de comparar esas dos cantidades. Dos cantidades pueden compararse de dos maneras: restándolas o dividiéndolas. Por ello, hay dos clases de razones: razón aritmética o por diferencia y razón geométrica o por cociente.

Razón aritmética o por diferencia: es la diferencia indicada en dichas cantidades.

Razón geométrica o por cociente: la razón geométrica o por cociente de dos cantidades es el cociente indicado de dichas cantidades.

El ángulo y su medida

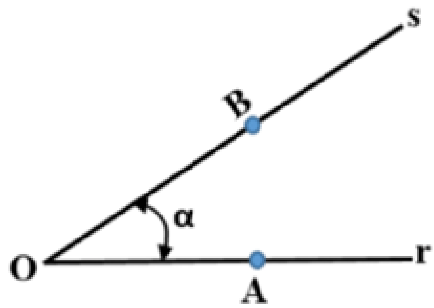
Llamamos ángulo $\angle(r,s)$ a la región del plano limitada por dos semirrectas ordenadas (r, s) que tienen un origen común O, que llamamos vértice del ángulo.

Notación:

Sean $A \in r$, $B \in s$

El ángulo α suele representarse como $\alpha = \angle AOB$.

Fig. 2.3. Representación gráfica de ángulo



Medidas de ángulos

Se utilizan diversos sistemas de medidas de ángulos. Los más utilizados son:

a) El sistema sexagesimal

b) El radián

Sistema sexagesimal. Se llama grado sexagesimal a cada una de las partes del resultado de dividir la circunferencia en 360 partes iguales.

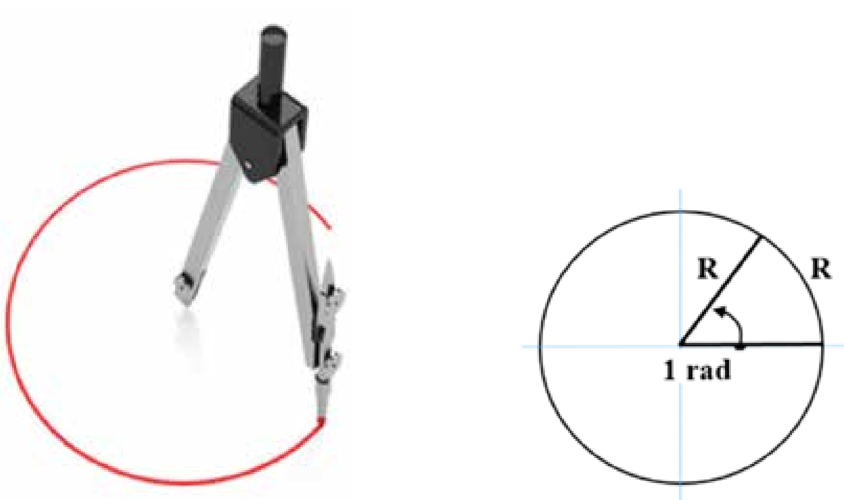
Los divisores del grado son:

Un grado es igual a 60 minutos: 1° = 60'; y un minuto es igual a sesenta segundos: 1'= 60".

Así, p. ej., un ángulo con las medidas: 15 grados, 20 minutos y 40 segundos se expresa de la siguiente manera: 15°20'40".

El radián: definimos radián como la medida de un ángulo central cuyos lados cortan un arco igual en longitud al radio en la circunferencia del círculo. Ya que la longitud de este arco es igual a un radio del círculo, se dice que la medida de este ángulo es un radián.

Fig. 2.4. Trazado de una circunferencia y la representación del radián



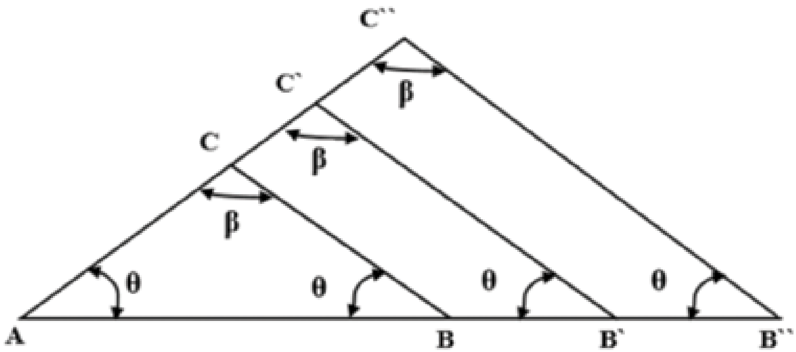
Fuente: Adaptado de: https://www.google.com/search?q=imagen+foto+Trazado+compas+radi%C3%A1n&tbm=isch&ved=2ahUKEwj5i_3qo4HwAhXpajABHdkjD40Q2-cCegQIABAA&oq=imagen+foto+Trazado+compas+radi%C3%A1n&gs_lcp=CgNpbWcQA1C2pQdY97YHYKa8B2gBcAB4AIABwgGIAe4CkgEDMC4ymAEAoAEBqgELZ3dzLXdpei1pbWfAAQE&sclient=img&ei=p7t4YLmcGenVwbkP2ce86Ag&bih=878&biw=1787&client=firefox-b-d

La equivalencia entre las medidas sexagesimales y radianes es: 360º = 2π radianes o bien: 180º = π radianes.

2.2.2. Modelos matemáticos de las relaciones o funciones trigonométricas

El valor de las siguientes relaciones, siempre y cuando observen el mismo ángulo, no depende del tamaño del triángulo rectángulo, pues constituyen triángulos semejantes (en las ingenierías, a estas figuras geométricas se les denomina paramétricas, pues guardan la misma relación de proporcionalidad en cada uno de sus lados) (ver fig. 2.6).

Fig. 2.5. Triángulos semejantes



Si los ángulos: $\hat{B} = \hat{B}' = \hat{B}'' = \theta \ \ y \ \ \hat{C} = \hat{C}' = \hat{C}'' = \beta <=>$ los triángulos ΔABC, $\Delta A'B'C' \ y \ \Delta A''B''C''$ son semejantes.

A continuación, estudiaremos la denominación de estas seis importantes funciones trigonométricas P; para ello nos ayudaremos de la figura 2.2. Las expresiones de la (2.7) a la (2.12) representan las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante respectivamente.

2.2.2.1. Funciones trigonométricas básicas

Función seno: relación entre las longitudes del cateto opuesto y la hipotenusa. Se denota como: f(x) = sen(x), ∀x ∈ ℝ.

$$sen\ \theta = \frac{Cat.Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{a}{c} \tag{2.7}$$

Función coseno: relación entre las longitudes del cateto adyacente y la hipotenusa. Se denota como: f(x) = cos(x), ∀x ∈ ℝ.

$$cos\ \theta = \frac{Cat.Adyacente}{Hipotenusa} = \frac{b}{c} \tag{2.8}$$

Función tangente: relación entre las longitudes del cateto opuesto y el adyacente. Se denota como: f(x) = tan(x), ∀x ∈ ℝ.

$$tan\ \theta = \frac{Cat.Opuesto}{Cat.\ Adyacente} = \frac{a}{b} \tag{2.9}$$

Función cotangente: relación entre las longitudes del cateto adyacente y el opuesto. Función inversa a la tangente. Se denota como: f(x) = cot(x), ∀x ∈ ℝ.

$$Cot\ \theta = \frac{Cat.Adyacente}{Cat.\ Opuesto} = \frac{b}{a} \tag{2.10}$$

Función secante: relación entre las longitudes de la hipotenusa y el cateto adyacente. Función inversa al coseno. Se denota como: f(x) = sec(x), ∀x ∈ ℝ.

$$sec\ \theta = \frac{hipotenusa}{Cat.\ Adyacente} = \frac{c}{b} \tag{2.11}$$

Función cosecante: relación entre las longitudes de la hipotenusa y el cateto opuesto. Función inversa al seno. Se denota como: f(x) = csc(x), ∀x ∈ ℝ.

$$csc\ \theta = \frac{hipotenusa}{Cat.\ Opuesto} = \frac{c}{a} \tag{2.12}$$

Observaciones:

Existen seis funciones trigonométricas básicas y, como se puede observar, las últimas cuatro están en función de las dos primeras (ver tabla 2.1).

Tabla 2.1. Funciones trigonométricas básicas

Función	Abreviatura	Equivalencias (en radianes)
Seno	Sen, sin	$sen\ \beta \equiv \frac{1}{\csc\beta} \equiv cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \equiv \frac{\cos\beta}{\cot\beta}$
Coseno	cos	$cos\ \beta \equiv \frac{1}{\sec\beta} \equiv sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \equiv \frac{\mathrm{sen}\,\beta}{\tan\beta}$
Tangente	tan, tg	$tan\ \beta \equiv \frac{1}{\cot\beta} \equiv cot\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \equiv \frac{\mathrm{sen}\,\beta}{\cos\beta}$
Cotangente	ctc, cot	$cot\ \beta \equiv \frac{1}{\mathrm{cat}\,\beta} \equiv tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \equiv \frac{\cos\beta}{sen\ \beta}$
Secante	sec	$sec\ \beta \equiv \frac{1}{\csc\beta} \equiv csc\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \equiv \frac{\tan\beta}{\mathrm{sen}\,\beta}$
Cosecante	csc, cosec	$csc\ \beta \equiv \frac{1}{\csc\beta} \equiv sec\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \equiv \frac{\cot\beta}{\cos\beta}$

2.2.2.2. Graficación de las funciones seno, coseno y tangente

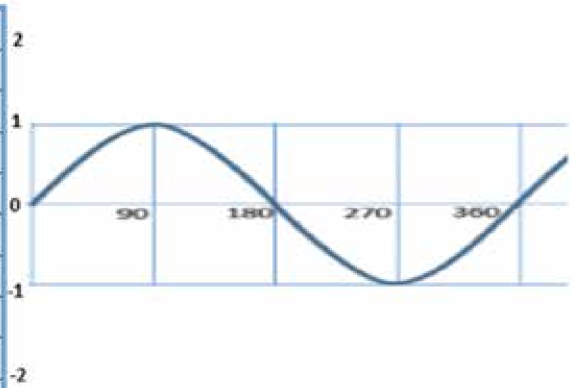
Las funciones trigonométricas son funciones periódicas: repiten el valor de imagen cada 360º. De esa manera, se puede comprobar que: cos 60º = cos 420º = 0,5; y así sucesivamente [(55)].

Ahora, procederemos a graficar las funciones: seno, coseno y tangente, —mediante las tablas que se presentan—, utilizando ángulos a intervalos de 45º:

Gráfica de la función seno: *sen* β = x

Fig. 2.6. Función seno

θ	sen θ
0	0
45	0,707
90	1
135	0,707
180	0
225	-0,707
270	-1
315	-0,707
360	0

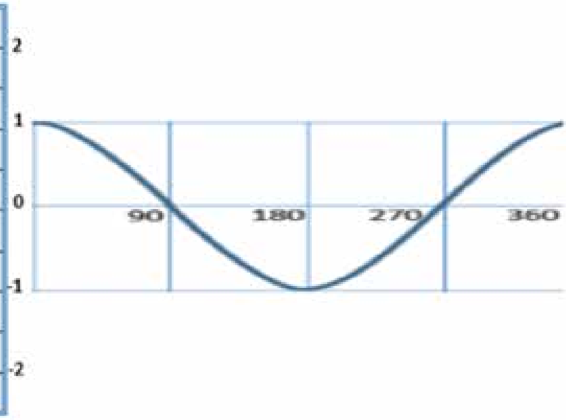


Fuente: Adpatada de: https://www.google.com/search?q=Graficaci%C3%B3n+de+las+funciones+seno%2C+coseno+y+tangente&tbm=isch&ved=2ahUKEwjN_LmCpYHwAhW1YjABHdygC18Q2-cCegQIABAA&oq=Graficaci%C3%B3n+de+las+funciones+seno%2C+coseno+y+tangente&gs_lcp=CgNpbWcQA1D20QdY9tEHYOvaB2gAcAB4AIAByAGIAcgBkgEDMi0xmAEAoAEBqgELZ3dzLXdpei1pbWfAAQE&sclient=img&ei=5bx4YI32BLXFwbkP3MGu-AU&bih=878&biw=1787&client=firefox-b-d#imgrc=e1jS5mNsKTvi6M

Gráfica de la función coseno: *cos* β = x

Fig. 2.7. Función coseno

θ	cos θ
0	1
45	0,707
90	0
135	-0,707
180	-1
225	-0,707
270	-0
315	0,707
360	1

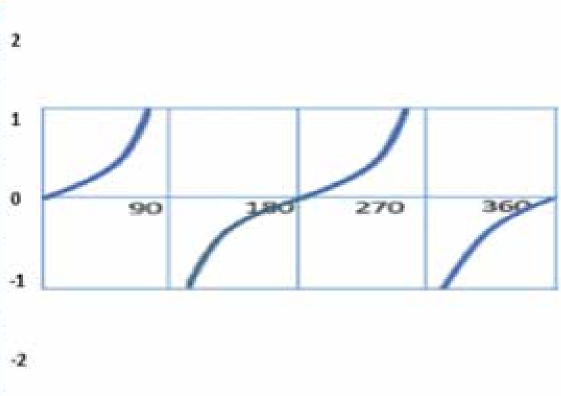


Fuente: Adaptada de: https://www.google.com/search?q=Graficaci%C3%B3n+de+las+funciones+seno%2C+coseno+y+tangente&tbm=isch&ved=2ahUKEwjN_LmCpYHwAhW1YjABHdygC18Q2-cCegQIABAA&oq=Graficaci%C3%B3n+de+las+funciones+seno%2C+coseno+y+tangente&gs_lcp=CgNpbWcQA1D20QdY9tEHYO-vaB2gAcAB4AIAByAGIAcgBkgEDMi0xmAEAoAEBqgELZ3dzLXdpei1pbWfAAQE&sclient=img&ei=5bx4YI-32BLXFwbkP3MGu-AU&bih=878&biw=1787&client=firefox-b-d#imgrc=e1jS5mNsKTvi6M

Gráfica de la función tan: *tan β* = x

Fig. 2.8. Función tangente

θ	tan θ
0	0
45	1
90	∞
135	-1
180	0
225	1
270	∞
315	-1
360	0



Fuente: Adaptada de: https://www.google.com/search?q=Graficaci%C3%B3n+de+las+funciones+seno%2C+coseno+y+tangente&tbm=isch&ved=2ahUKEwjN_LmCpYHwAhW1YjABHdygC18Q2-cCegQIABAA&oq=Graficaci%C3%B3n+de+las+funciones+seno%2C+coseno+y+tangente&gs_lcp=CgNpbWcQA1D20QdY9tEHYO-vaB2gAcAB4AIAByAGIAcgBkgEDMi0xmAEAoAEBqgELZ3dzLXdpei1pbWfAAQE&sclient=img&ei=5bx4YI-32BLXFwbkP3MGu-AU&bih=878&biw=1787&client=firefox-b-d#imgrc=e1jS5mNsKTvi6M

2.2.2.3. Funciones trigonométricas inversas

Arcoseno

El *arcoseno* es la función inversa del *seno*:

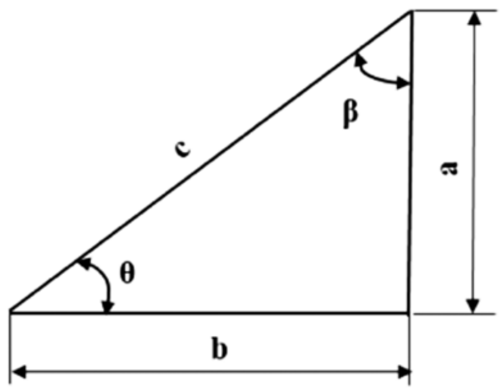
Si arc sen x = β, entonces: *sen β* = x

Dicho de otra forma: *arc sen(sen β)* = β

Su abreviatura es: arcsen o sen^{-1}

Gráfica de la función arcoseno: *β = arcsen x*

Fig. 2.9. Función arcoseno



Arcocoseno

El *arcocoseno* es la función inversa del *coseno*:

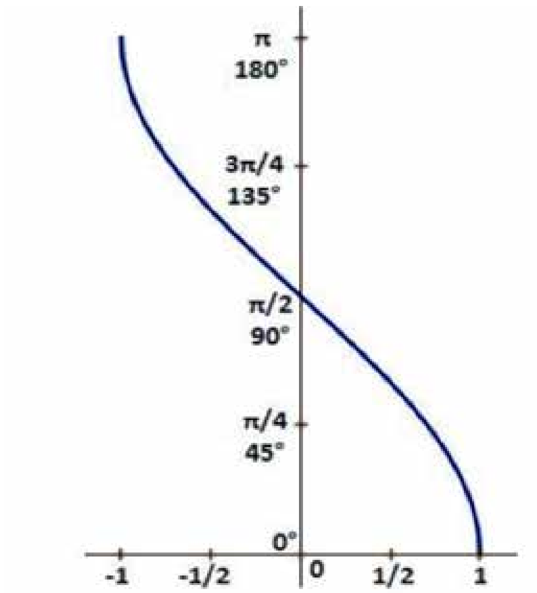
Si arc cosen x = β, entonces: *cos β* = x

Dicho de otra forma: *arc cosen(cos β)* = β

Su abreviatura es: arccos o $\cos^{-1}$

Gráfica de la función arcocoseno: *β = arccos x*

Fig. 2.10. Función arcocoseno



Fuente: Adaptada de: https://www.google.com/search?q=Graficaci%C3%B3n+de+las+funciones+seno%2C+coseno+y+tangente&tbm=isch&ved=2ahUKEwjN_LmCpYHwAhW1YjABHdygC18Q2-cCegQIABAA&oq=Graficaci%C3%B3n+de+las+funciones+seno%2C+coseno+y+tangente&gs_lcp=CgNpbWcQA1D20QdY9tEHYO-vaB2gAcAB4AIAByAGIAcgBkgEDMi0xmAEAoAEBqgELZ3dzLXdpei1pbWfAAQE&sclient=img&ei=5bx4YI-32BLXFwbkP3MGu-AU&bih=878&biw=1787&client=firefox-b-d#imgrc=e1jS5mNsKTvi6M

Arcotangente

El *arcotangente* es la función inversa del *tangente*:

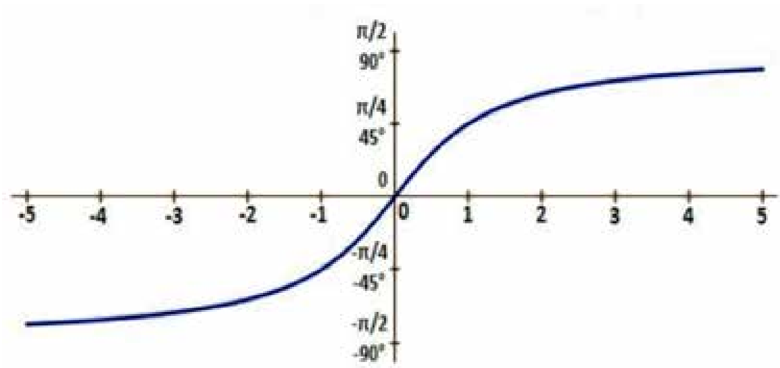
Si arc tan x = β, entonces: *tan β* = x

Dicho de otra forma: *arc tan(tan β)* = β

Su abreviatura es: arctan o $\tan^{-1}$

Gráfica de la función arcotangente: *β = arctan x*

Fig. 2.11. Función arcotangente



Fuente: Adaptada de: https://www.google.com/search?q=Graficaci%C3%B3n+de+las+funciones+seno%2C+coseno+y+tangente&tbm=isch&ved=2ahUKEwjN_LmCpYHwAhW1YjABHdygC18Q2-cCegQIABAA&oq=Graficaci%C3%B3n+de+las+funciones+seno%2C+coseno+y+tangente&gs_lcp=CgNpbWcQA1D20QdY9tEHYO-vaB2gAcAB4AIAByAGIAcgBkgEDMi0xmAEAoAEBqgELZ3dzLXdpei1pbWfAAQE&sclient=img&ei=5bx4YI-32BLXFwbkP3MGu-AU&bih=878&biw=1787&client=firefox-b-d#imgrc=e1jS5mNsKTvi6M

2.2.3. Tablas de las funciones trigonométricas y valores de las funciones seno, coseno y tangente para ángulos de uso frecuente

Sirviéndonos de la figura 2.13, podemos elaborar las tablas 2.2 y 2.3, donde aparecen las relaciones antes citadas, para los ángulos θ y β [56, 57].

Fig. 2.12. Triángulo rectángulo

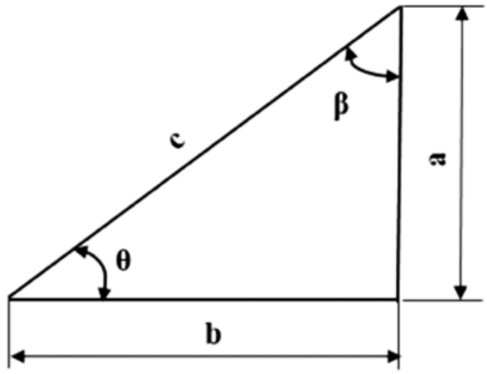


Tabla 2.2. Relaciones para el ángulo θ

seno	coseno	tangente
$sen\theta = \frac{a}{c} = \frac{1}{\cos\theta}$	$\cos\theta = \frac{b}{c} = \frac{1}{sec\theta}$	$\tan\theta = tg\ \theta = \frac{a}{b} = \frac{1}{ctg\ \theta}$
cosecante	**secante**	**cotangente**
$csc\theta = \frac{1}{sen\theta} = \frac{c}{a}$	$sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{c}{b}$	$ctg\ \theta = \cot\theta = \frac{1}{tg\ \theta} = \frac{b}{a}$

Tabla 2.3. Relaciones para el ángulo β

seno	coseno	tangente
$sen\beta = \frac{b}{c} = \frac{1}{csc\beta}$	$cos\ \beta = \frac{a}{c} = \frac{1}{sec\ \beta}$	$tan\ \beta = tg\ \beta = \frac{b}{a} = \frac{1}{ctg\ \beta}$
cosecante	**secante**	**cotangente**
$csc\beta = \frac{1}{sen\beta} = \frac{c}{b}$	$sec\beta = \frac{1}{\cos\beta} = \frac{c}{a}$	$ctg\ \beta = cot\ \beta = \frac{1}{tg\ \beta} = \frac{a}{b}$

En la tabla 2.4, se exponen los valores de las funciones seno, coseno y tangente de aquellos ángulos más frecuentemente utilizados.

Tabla 2.4. Valores de las funciones seno, coseno y tangente, para ángulos de uso frecuente

	0º (0 rad)	**30º $(\frac{\pi}{6}rad)$**	**45º $(\frac{\pi}{4}rad)$**	**60º $(\frac{\pi}{3}rad)$**	**90º $(\frac{\pi}{2}rad)$**	**180º (πrad)**
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

Antes de continuar con el estudio de las funciones trigonométricas, y por solo citar un ejemplo del vasto campo de su uso, sería interesante observar la figura 2.14 y lo que nos dice la referida fuente, acerca del *Canadarm 2*: brazo manipulador robótico gigantesco de la Estación Espacial Internacional: "Este manipulador es operado controlando los ángulos de sus articulaciones. Calcular la posición final del astronauta en el extremo del brazo requiere un uso repetido de las funciones trigonométricas de esos ángulos que se forman por los varios movimientos que se realizan" [58].

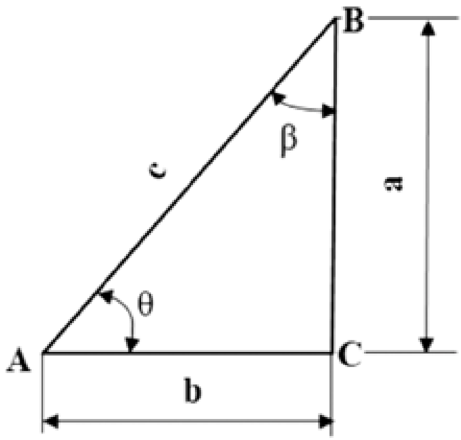
Fig. 2.13. Brazo manipulador robótico gigantesco de la Estación Espacial Internacional

Fuente: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e5/STS-114_Steve_Robinson_on_Canadarm2.jpg

2.2.5. Ejercicios de aplicación con triángulos rectángulos

Ejercicio 1:

Determinar el lado opuesto "a" y los ángulos "β" y "θ", conociendo que el cateto adyacente tiene un valor de 10 cm y la hipotenusa de 20 cm.



Solución:

Determinación del lado "a"

$$a = \sqrt{C^2 - b^2}$$

$$= \sqrt{(20\ cm)^2 - (10\ \ cm)^2}$$

$$= \sqrt{300\ \ cm^2}$$

$$= 17{,}32\ cm$$

Determinación del ángulo "β"

$$sen\ \beta = \frac{b}{c} = \frac{10}{20}$$

$$\beta = sen^{-1}\frac{10}{20}$$

$$= 30^o$$

Determinación del ángulo "θ"

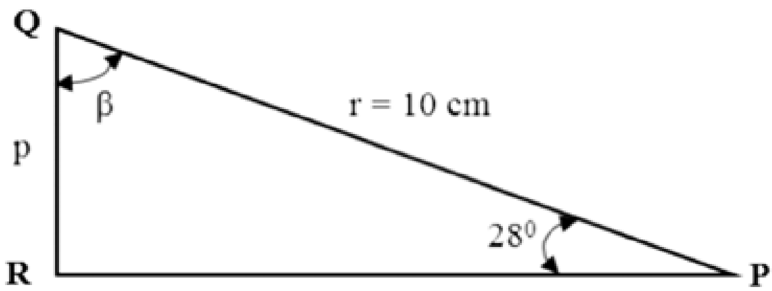
Dado que $\beta + \theta + 90^o = 180^o$

$$\theta = 180^o - 90^o - 30^o$$

$$= 60^o$$

Ejercicio 2:

En el triángulo rectángulo PRQ se conoce que la hipotenusa mide 10 cm y que uno de sus ángulos es de 28º. Calcule los dos catetos y el ángulo faltante.



Solución:

$$sen\ 28^o = \frac{p}{10\ cm}$$

Entonces, despejando el cateto "p", se tiene que:

$$p = sen\ 28^o . 10\ cm$$

$$= 4,69\ cm$$

De igual forma se procede con el cateto "q":

$$cos\ 28^o = \frac{q}{10\ cm}$$

$$q = \cos 28^o . 10\ cm$$

$$= 8{,}82\ cm$$

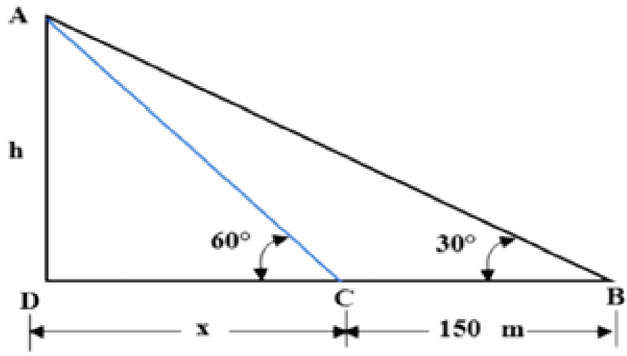
El ángulo faltante "β" se calcula a través del Teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo: la suma de todos los ángulos intenos de un triángulo es igual a 180º.

Entonces, el ángulo desconocido resulta:

$\beta = 180^o - 28^o - 28^o = 62^o$

Ejercicio 3:

Tres observadores se encuentran en los puntos A, B y C . Los observadores B y C están separados por una distancia de 150 m . El observador A, situado en la cima de una ladera, es observado desde los puntos B y C . Los ángulos formados en los vértices de los puntos C y B de los triángulos correspondientes poseen un valor de 60° y 30° respectivamente, ambos con respecto al observador del punto A. Calcule la altura "h", donde se encuentra el observador A, respecto a la superficie.



Solución:

Considerando el triángulo ADC, llamemos a la distancia DC = x, entonces:

$$tan\ 60^0 = \frac{h}{x}$$

Despejando convenientemente, y sustituyendo el valor de la tangente de 60º tendremos que:

$$x = \frac{h}{tan\ 60^0} = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

Considerando ahora el triángulo ADB, podemos obtener una nueva ecuación, despejando la variable "x", mediante la funcion tangente:

$$\tan 30° = \frac{h}{x + 150}$$

$$x + 150 = \frac{h}{\tan 30°}$$

$$x = \frac{h}{\tan 30°} - 150$$

De lo cual resulta un sistema de ecuaciones, donde se podrá calcular facilmente el valor de “h”.

$$\begin{cases} x = \dfrac{h}{\sqrt{3}} \\ \\ x = \dfrac{h}{\tan 30°} - 150 \end{cases}$$

Al igualar términos semejantes, quedará todo en función de “h”:

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\tan 30°} - 150$$

$$\frac{h}{\sqrt{3}} - \frac{h}{\tan 30°} = -150$$

Despejando, sustituyendo los valores de las funciones trigonométricas y efectuando, obtendremos:

$$(h).(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\tan 30°}) = -150$$

$$h = \frac{-150}{(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\tan 30°})}$$

$$h = \frac{150}{(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}})}$$

$$h = \frac{150}{(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3})}$$

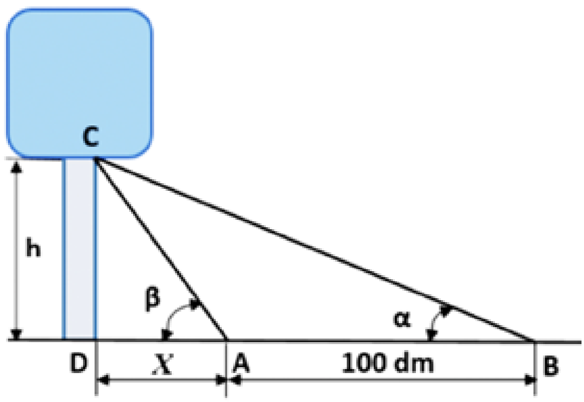
$$h = \frac{-150.\sqrt{3}}{1 - 3}$$

$$h = \frac{-150.\sqrt{3}}{-2}$$

$$h = 75.\sqrt{3}\,m$$

Ejercicio 4:

Es preciso situar un tanque, para el abastecimiento de agua de una mini industria, a una altura h desde el suelo hasta la base; lo cual permitiría que A y B: puntos de abasto de agua al tanque y en B de entrega, separados 100 dm, formen ángulos de β = 60º y α = 30º, respectivamente. Determine la altura "h".



Solución:

En el primer triángulo: ACD

$$\tan\beta = \tan 60^o = \frac{h}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}} \tag{1}$$

En el segundo triángulo: BCD

$$tan\alpha = \frac{h}{x + 100\ dm}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 100\ dm}$$

$$x + 100\ dm = \sqrt{3}\ .\ h$$

$$x = \sqrt{3}. h - 100\ dm \tag{2}$$

Al igualar las ecuaciones (1) y (2) obtendremos:

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,. h - 100\ dm$$

Multiplicando por $\sqrt{3}$, agrupando términos semejantes, obtendremos finalmente:

$$h = 3h - 100\sqrt{3}\ dm$$

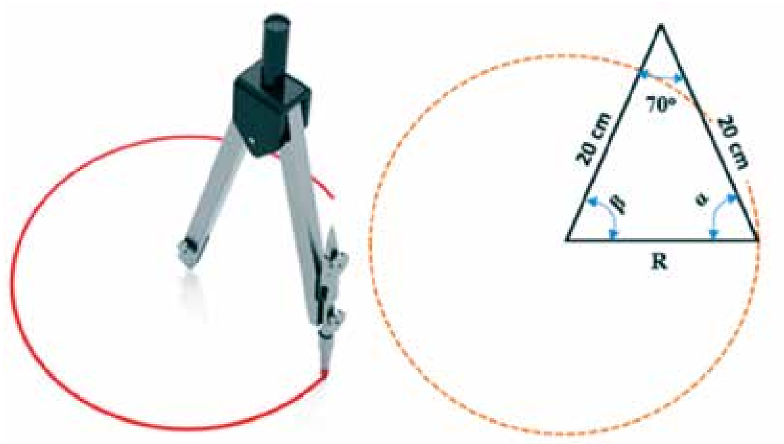
$$h - 3h = -100\sqrt{3}\ dm$$

$$2h = 100\sqrt{3}\ dm$$

$$h = 50\sqrt{3}\ dm$$

Ejercicio 5:

Durante el trazado de una circunferencia, se utiliza un compás de 20 cm de brazo, los cuales forman un ángulo de 70o. Calcule el radio de la citada circunferencia.



Solución:

Como se puede apreciar en la figura, los dos brazos del compás, junto al radio R de la circunferencia forman un triángulo isósceles. Para determinar el radio R seguiremos los siguientes pasos:

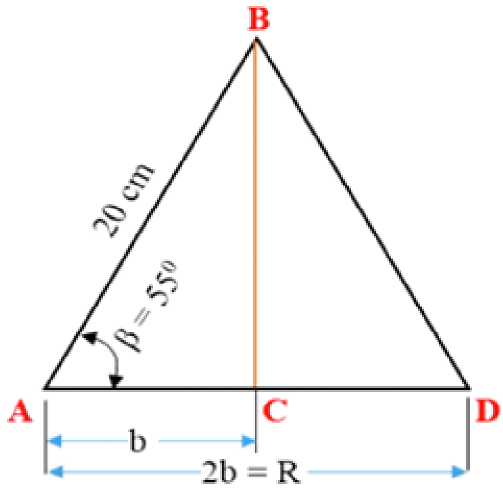
1. Determinación de cualquiera de los dos ángulos iguales formados: β o α.

$180^o = 70^o + \beta + \alpha$

$110^o = 2\beta$

$\beta = 55^o$

Trazamos la altura, resultando y resultan dos triángulos iguales: ABC y BCD. Operamos con el primero y determinamos el cateto adyacente b; una vez determinado el valor de “b” lo multiplicamos por dos, de lo cual resulta el valor del radio R.



$$cos\beta = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{AB} = \frac{b}{20\ cm}$$

$$cos55^o = \frac{b}{20\ cm}$$

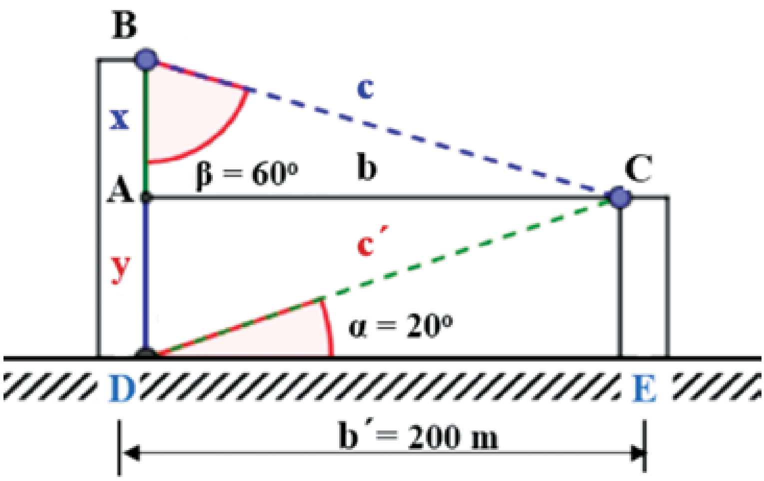
$$b = (20\ cm).(cos55^o)$$

$$b = (20\ cm).(0{,}573576) = 11{,}47152\ cm$$

$$R = 22{,}9404\ cm$$

Ejercicio 6:

Se desea calcular la altura de dos torres separadas por 200 m; desde la cima de la torre BD se puede avistar la torre CE, bajo un ángulo de 60º; mientras que desde su base el ángulo toma el valor de 20º.



Solución:

Para llegar a determinar la altura de ambas torres debemos seguir los siguientes pasos:

1. Premisas: el segmento "b" (que constituye un cateto común de los triángulos: ABC y ACD) tiene un valor de 200 m; la altura de la torre pequeña es igual al segmento "y" = CE; mientras que la altura de la torre más alta es igual al segmento x + y = BD.

2. Determinación de los segmentos c = BC y c´= DC, hipotenusas de los triángulos ABC y DCE, respectivamente; para ello nos valdremos de las relaciones trigonométricas:

$$sen\beta = \frac{b}{c}$$

$$cos\alpha = \frac{b'}{c'}$$

Cálculo de la hipotenusa c = BC

$$sen\beta = \frac{b}{c}$$

$$c = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{200}{sen\ 60^0} = \frac{(2).(200)}{\sqrt{3}} = 230{,}947\ m$$

Cálculo de la hipotenusa c´= DC

$$cos \propto = \frac{b´}{c´}$$

$$c´ = \frac{b´}{cos\ \alpha} = \frac{200}{cos\ 20^0} = \frac{(200)}{0{,}939693} = 212{,}835\ m$$

3. Cálculo de las alturas “x” y “y”

Cálculo de la altura “x”

$$cos\ \beta = \frac{x}{c}$$

$$x = c.cos\ \beta = (230{,}947).(cos\ 60^o) = (230{,}947).(0{,}5)$$

$$= 115{,}474\ m$$

Cálculo de “y”: altura de la torre pequeña: CE

$$sen\ \alpha = \frac{y}{c´}$$

$$y = c´.sen\ \alpha = (212{,}835).(sen\ 20^0) = (212{,}835).(0{,}34202)$$

$$= 72{,}794\ m$$

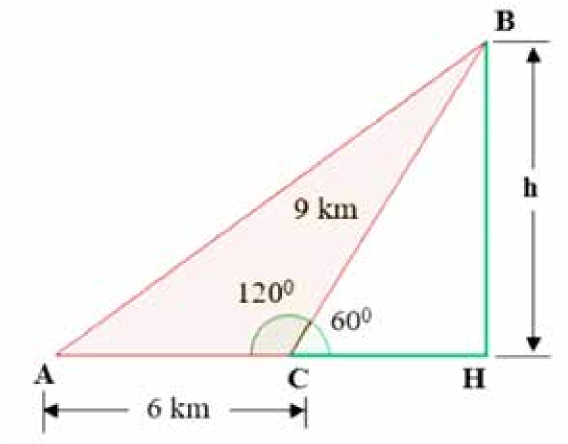
4. Cálculo de “x + y”: altura de la torre grande: BD

x + y = 115,474 m + 72,794 m

= 188,268 m

Ejercicio 7:

Tres pueblos, denominados con las letras A, B y C están unidos por carreteras. La distancia de AC = 6 km y la de BC = 9 km. El ángulo que forman estas dos carreteras es 120°, como se puede apreciar en la figura. Calcular la distancia AB.



Solución:

$CH = 9\cos 60^0$

$BH = 9\,\text{sen}\, 60^0$

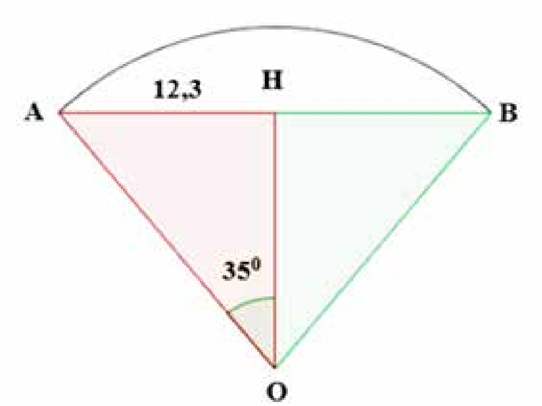
$AB = \sqrt{(BC + CH)^2 + (BH)^2}$

$AB = \sqrt{(6 + 9.\cos 60^0)^2 + (9.\,sen\ 60^0)^2}$

$= 13{,}077\ km$

Ejercicio 8:

Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24,6 cm tiene como arco correspondiente uno de 70°.



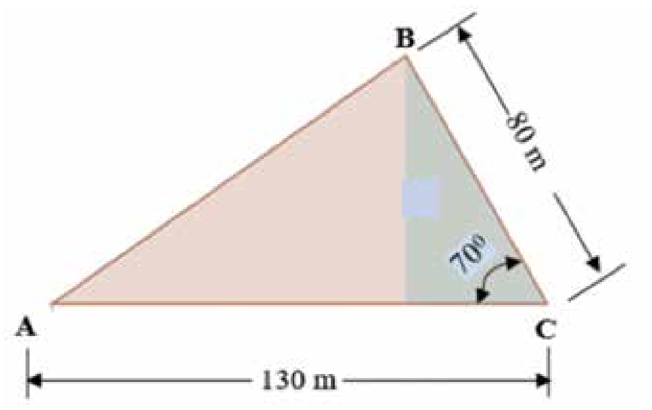
Solución:

$$sen\ 35^0 = \frac{12,3}{OA}$$

$$OA = \frac{12,3}{sen\ 35^0} = 21,44\ cm$$

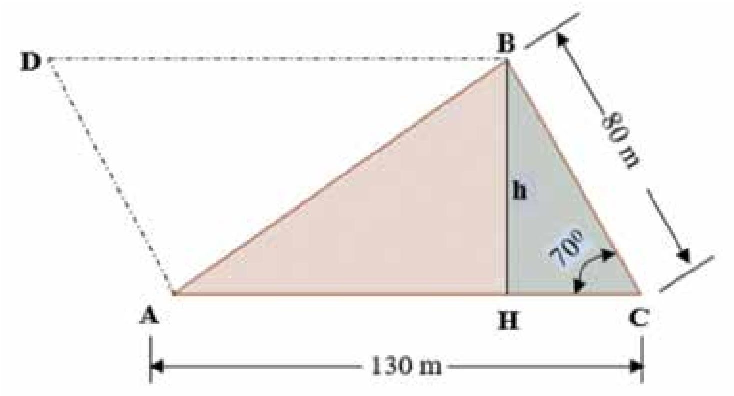
Ejercicio 9:

Calcular el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m respectivamente, y forman entre ellos un ángulo de 70°.



Solución:

Primero, trazamos la altura del triángulo ABC, y resulta BH, es decir, la altura "h". Ahora podremos calcular fácilmente el área de la parcela formando un paralelogramo.



$$sen\ 70^0 = \frac{h}{80\ m}$$

$$h = 80\ m.\ sen\ 70^0 = (80\ m).(0{,}939693) = 75{,}175\ \text{m}$$

Como es conocido, el área a de un paralelogramo se obtiene multiplicando la base por la altura. Entonces el área de la parcela sería la mitad del área de este.

$$Área_{\ parcela} = \frac{Base.\ Altura_{paralelogramo}}{2}$$

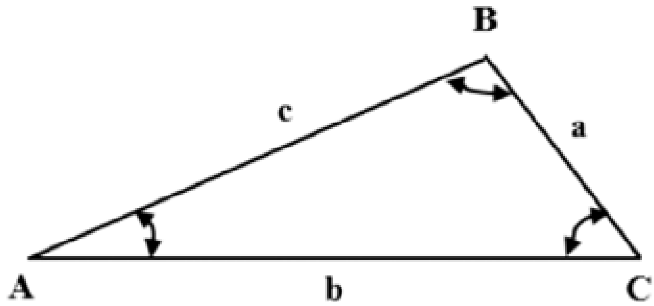
$$= \frac{130\ m).(75{,}175)m}{2}$$

$$= 4\ 886{,}375\ m^2$$

2.2.6. Resolución de triángulos mediante el Teorema del seno y del coseno

No en todos los casos que vamos a determinar el valor de lados y ángulos necesariamente los triángulos tienen que ser rectángulos. Existen muchos casos donde el triángulo, o bien posee un ángulo mayor a noventa grados, o simplemente los tres son menores que este; se trata de los triángulos oblicuángulos (que no poseen ningún ángulo recto); pueden ser obtusángulos(2.2) o acutángulos(2.3). A través del Teorema del seno y el coseno, es posible determinar los lados y ángulos de cualquier tipo de triángulo [57, 59].

Fig. 2.14. Triángulo obtusángulo(2.3)



Veamos ahora los modelos matemáticos (2.13) y (2.14) correspondientes a estos dos importantes teoremas:

(2.2) **Triángulo obtusángulo**: es aquel que posee un ángulo obtuso: que mide más de 90°; mientras que los dos restantes son agudos.
(2.3) **Triángulo acutángulo**: es aquel que posee los tres ángulos agudos.

Teorema del seno:

"Establece la relación que hay entre cada lado y el seno del ángulo opuesto a dicho lado, y estas tres relaciones, a su vez, son iguales entre sí" [60].

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} \tag{2.13}$$

Teorema del coseno:

"En un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman" (61). Ver sistema de ecuaciones (2.14)

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2b.c.cosA \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2a.c.cosB \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2a.b.cosC \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Según sea el caso, se pueden presentar cuatro tipos de resolución de triángulos oblicuángulos.

I. Cuando es conocido un lado y dos ángulos adyacentes a este

En la figura 2.12 puede darse la situación que conozcamos el lado "b" y los ángulos "A" y "C". En este caso, primeramente, podemos utilizar la ecuación (2.15) y despejar el ángulo que no conocemos y posteriormente calcular los lados desconocidos.

$$A + B + C = 180^o \tag{2.15}$$

$$B = 180^o - A - C$$

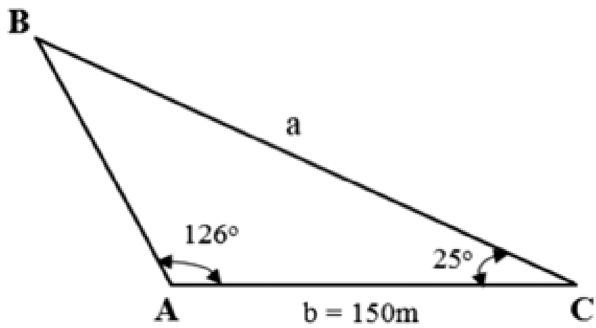
Para determinar los lados desconocidos nos ayudamos de la Ec. (2.13) —*Ley del seno*—, de lo cual resulta:

$$a = c\frac{senA}{senC} \tag{2.16}$$

$$c = a\frac{senC}{senA} \tag{2.17}$$

Ejemplo 1:

Sea el lado b = 150 m y los ángulos A = 126º y C = 25º. Determinar el ángulo "B" y los lados "a" y "c".



Solución:

En la solución de este sencillo problema, solo basta con aplicar las fórmulas (2.13) y (2.15) y (2.17).

$$B = 180^o - A - C = 180^o - 126^o - 25^o = 180^o - 151^o = 29^o$$

$$a = b.\frac{sen\ A}{sen\ B} = \frac{(150\ m).(sen\ 126^o)}{sen\ 29^o} = \frac{(150\ m).(0{,}829)}{0{,}485} = 427{,}32\ m$$

$$c = a.\frac{sen\ C}{sen\ A} = 427{,}32\ m.\frac{sen\ 25^o}{sen\ 126^o} = 427{,}32\ m.\frac{0{,}4226}{0{,}829} = 217{,}83\ m$$

II. Cuando son conocidos dos lados y el ángulo comprendido entre estos

Supongamos que en la siguiente figura conocemos el ángulo "C" y los lados "a" y "b". Primero procederemos a calcular el lado desconocido "c", aplicando la Ley del coseno (ver ecuación (2.14)). A continuación, aplicamos la Ley del seno (ecuación 2.13) para hallar uno de los dos ángulos desconocidos, por ejemplo, el ángulo A", (transformándola en función arcocoseno) y después, aplicamos la Ec. (2.15) y obtendremos el ángulo restante "B".

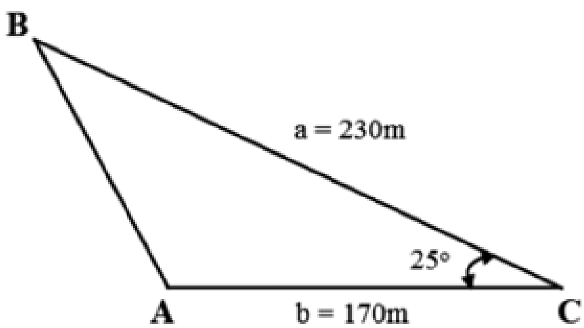
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C}$$

$$sen\ A = \frac{a}{b} sen\ B$$

$$B = 180^o - A - C$$

Ejemplo 2:

Sea los lados a = 230 m y b = 170 m y el ángulo C = 25o. Determinar los ángulos "A" y "B" y el lado "c".



Solución:

Hallaremos primeramente el lado desconocido "c", aplicando la ecuación (2.14). Seguidamente, a través de la ecuación (2.13), transformándola en arcoseno, calcularemos el ángulo "A"; y, posteriormente, mediante la ecuación (2.15), obtendremos el valor del ángulo "B".

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C}$$

$$= \sqrt{(230^2 + 170^2) - (2).(230).(170).(\cos 25)}$$

$$= \sqrt{52\,900 + 28\,900 - (78\,200).(0{,}9063)}$$

$$= \sqrt{81\,800 - 70\,873} = \sqrt{10\,927} = 104{,}53\ m$$

$$A = arcsen\ (A) = \ arcsen\ (\frac{a}{b} sen\ B)$$

$$= arcsen\ (\frac{230}{170} sen\ 25^{o})$$

$$= arcsen\ (1{,}353).(0{,}4226)$$

$$= arcsen\ (0{,}5718)$$

$$= 34^{º}\ 52'\ 33$$

$$B\ =\ 180^{o} - A - C$$

$$= 180^{o} - 34^{º}\ 52'\ 33'' - 25^{o}$$

$$= 121^{º}\ 04'\ 27''$$

III. Cuando son conocidos dos lados y un ángulo opuesto

Supongamos que en un determinado triàngulo conocemos los lados "a" y "b" y el ángulo "B" y queremos determinar los dos ángulos y el lado restantes.

Llegar a la solución del problema resulta muy fácil aplicando la Ley del seno, ecuación (2.13); pero, estamos en presencia de un caso especial, donde el triángulo debe ser rectángulo, si *sen B* = 1; o puede ser oblicuángulo si *sen B* < 1. Veamos el siguiente ejemplo [62].

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B}$$

Si:

a) senB >1 No hay solución

Ejemplo 3:

Resolver el triángulo que posee los siguientes datos: A = 30°, a = 8 m y b = 18 m.

Solución:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B}$$

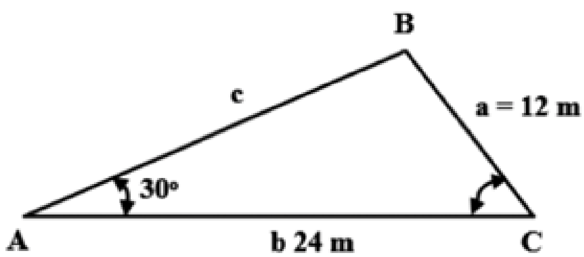
$$\frac{12}{sen\ 30^0} = \frac{18}{sen\ B}$$

$$sen\ B = \frac{18.\,sen\ 30^0}{8} = \frac{(18).\,(0{,}5)}{8} = 1{,}125$$

La respuesta obtenida nos indica que ese triángulo no existe, pues el seno de un ángulo nunca puede ser mayor que uno.

b) senB = 1 Solución única: corresponde a un triángulo rectángulo

Supongamos que A = 30º, a = 12 y b = 24



Solución:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B}$$

$$\frac{12}{sen\ 30^0} = \frac{24}{sen\ B}$$

$$sen\ B = \frac{24\ m.sen\ 30^0}{12\ m}$$

$$= \frac{(24\ m).(0,5)}{12\ m}$$

$$= 1$$

$$B = 90^o$$

c) *sen B* < 1 *existen 1 ó 2 soluciones*

Ejemplo 4:

Supongamos ahora que A = 60º, a = 30 dm y b = 10 dm. ¿Cuál es el valor de B?

Solución:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B}$$

$$\frac{30\ dm}{sen\ 60^0} = \frac{10\ dm}{sen\ B}$$

$$sen\ B = \frac{10.sen\ 60^0}{30}$$

$$= \frac{(10).\sqrt{3}}{(3).(10)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 0{,}5773$$

$$B = arcsen\ (0{,}5773)$$

$$= 35º\ 15'\ 39"$$

Evidentemente solo es válida la solución cuando B=35º 15' 39", ya que el lado a > b

El ángulo C se obtendrá por la diferencia de los anteriores:

C = 180º - 60º - 35º 15' 39"

= 85º 45' 21"

IV: Cuando son conocidos los tres lados

Para la solución de estos casos, nos auxiliamos de la Ley del Coseno. Primeroamente, despejamos, según el sistema de ecuaciones (2.14), la función trigonométrica correspondiente a dos de los ángulos que queremos encontrar; calculado el valor correspondiente, utilizamos la función arco coseno; hallado el valor de dos de los ángulos, el tercero se calcula por simple resta de los dos primeros.

$$cos\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c.}$$

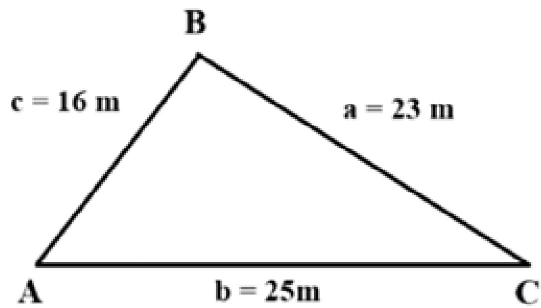
$$cos\ B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c.}$$

$$C = 180^o - A - B$$

Un sencillo ejemplo bastaría para corroborar lo anterior.

Ejemplo 5:

Hallar el valor de los ángulos correspondientes al triángulo que posee las siguientes medidas de sus lados: a = 23 cm, b = 25 cm y c = 16 cm



Solución:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c.}$$

$$= \frac{25^2 + 16^2 - 23^2}{(2).(25).(16)}$$

$$= \frac{625 + 256 - 529}{800}$$

$$= 0{,}44$$

$$A = \arccos\ (0{,}44)$$

$$= 63º\ 53'\ 46"$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c.}$$

$$= \frac{23^2 + 16^2 - 25^2}{(2).(23).(16).}$$

$$= \frac{529 + 256 - 625}{736}$$

$$= 0{,}2174$$

$$B = \arccos\ (0{,}2174)$$

$$= 77º\ 30'\ 84"$$

$$C = 180^o - A - B$$

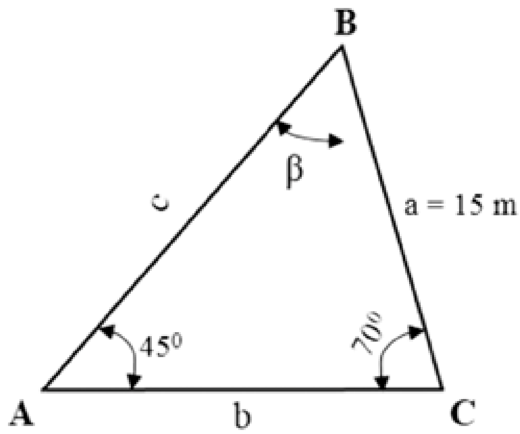
$$= 180^o - 63º\ 53'\ 46'' - 77º\ 30'\ 8''$$

$$= 40º\ 17'\ 06''$$

2.2.7. Ejercicios de aplicación con triángulos acutángulos y obtusángulos

Ejercicio 1:

Calcular los lados "b" y "c", así como el ángulo "B", en el triángulo oblicuángulo que aparece en la siguiente figura.



Solución:

Este caso es de muy fácil solución aplicando el Teorema del Seno (ver ecuación (2.13)). Calcularemos primero el lado "c" y posteriormente el "b".

Calculo del lado "c"

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{c}{sen\ C}$$

$$c = \frac{a}{sen\ A}.sen\ C$$

$$= \frac{15\ m}{sen\ 45^o}.sen\ 70^o$$

$$= \frac{15\ m}{0{,}707} . 0{,}940$$

$$= 19{,}943\ m$$

Cálculo del ángulo "B"

Este se obtiene a través de la suma de los ángulos internos del triángulo que es igual a 180º.

$$A + B + C = 180^o$$

$$B\ = 180^o - A - C$$

$$= 180^o - 45^o - 70^o$$

$$= 65^o$$

Cálculo del lado "b"

Para hallar el valor del lado "b", aplicamos nuevamente la ecuación (2.13) .

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B}$$

$$b\ = \frac{a}{sen\ A} sen\ B$$

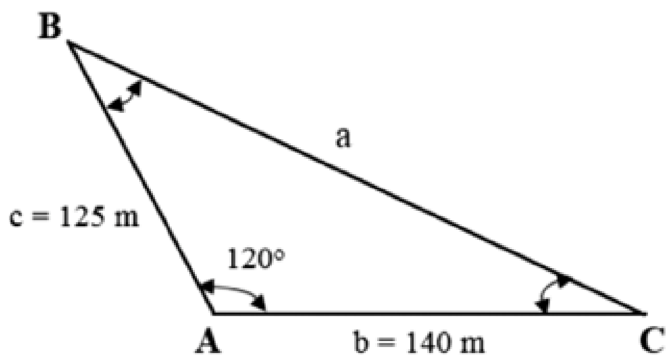
$$= \frac{15m}{sen\ 45^o} sen\ 60^o$$

$$= \frac{15\ m}{0{,}707} . 0{,}866$$

$$= 18{,}37\ m$$

Ejercicio 2:

Calcular el lado "a", así como los ángulos "B" y "C", en el triángulo obtusángulo que aparece en la siguiente figura.



Solución:

Para resolver este ejercicio, se precisa de la aplicación del Teorema del Coseno, según la ecuación (2.14).

Primero, calcularemos el lado "a", ya que disponemos de los lados "b" y "c" y del ángulo "A", para posteriormente pasar al cálculo de los ángulos "B" y "C".

Cálculo del lado "a"

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$$

$$= 140^2 + 125^2 - (2).(140).(125).cos\ 120^o$$

$$= 19\,600 + 15\,625 - (2).(140).(125).(-0{,}5)$$

$$= 35\,225 + 17\,500$$

$$a = \sqrt{52\,725}$$

$$a = 230\ m$$

Cálculo del ángulo "B"

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos B$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c}$$

$$= \frac{230^2 + 125^2 - 140^2}{(2).(230).(125)}$$

$$= \frac{52\,900 + 15\,625 - 19\,600}{57\,500}$$

$$= 0{,}85086$$

$$B = arc\ cos\ (0{,}85086)$$

$$= 31º\ 41'\ 41"$$

Cálculo del ángulo "C"

El cálculo del ángulo "C" se torna muy fácil, toda vez que recordemos que la suma de los tres ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°. (En la resta, no se debe olvidar que los minutos y segundos obedecen al sistema de numeración posicional sexagesimal.[(2.4)].

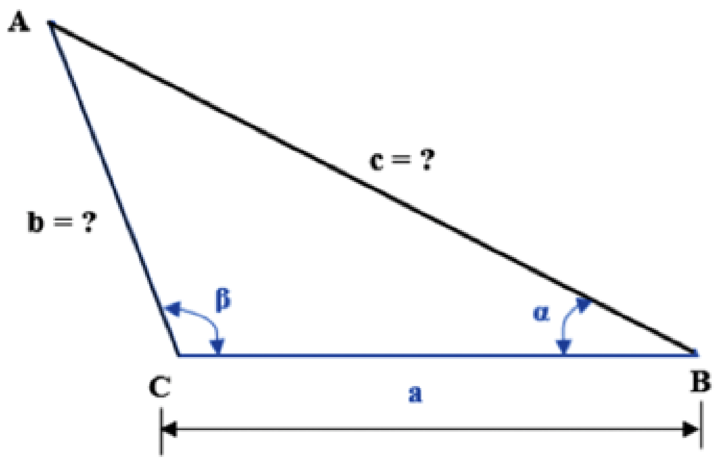
C = 180 - 120 - 31° 41'41"

= 28° 19' 19"

Ejercicio 3:

Resolver un triángulo conociendo un lado "a" y dos ángulos adyacentes a él: "β" y "α", según se muestra en la siguiente figura; es decir, calcular los dos lados restantes "b" y "c".

(2.4) Sistema sexagesimal: "Sistema de numeración posicional que emplea como base aritmética el número 60. Tuvo su origen en la antigua Babilonia. Se usa para medir tiempos (horas, minutos y segundos) y ángulos (grados, minutos y segundos). En dicho sistema, 60 unidades de un orden forman una unidad" (http://diccionario.sensagent.com/Sistema%20sexagesimal/es-es/).



Solución:

Nos apoyamos, primeramente, en el conocido Teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, que es igual a dos rectos; es decir, a 180 grados; y de esta forma, determinamos el valor del ángulo "A"; y posteriormente aplicaremos el Teorema del seno.

Cálculo del ángulo "A":

A = 180º - B - C

Cálculo del lado "b":

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B}$$

$$b = a.\frac{sen\ B}{sen\ A}$$

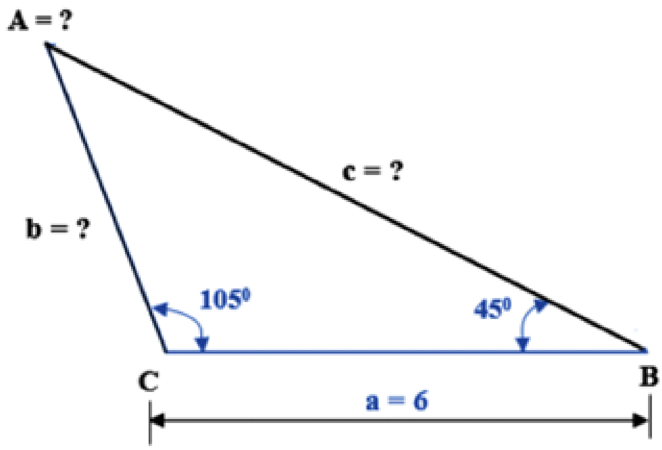
Cálculo del lado "c":

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{c}{sen\ C}$$

$$c = a.\frac{sen\ C}{sen\ A}$$

Ejercicio 4:

De un triángulo se conoce que: a = 6 m, B = 45° y C = 105°. Calcule los restantes elementos del triángulo, según se muestra en la figura:



Solución:

A = 180º - 45º - 105º

= 30º

Cálculo del lado "b":

$$\frac{6\,m}{sen\ 30^0} = \frac{b}{sen\ 45^0}$$

$$b = 6\,m.\frac{sen\ 45^0}{sen\ 30^0}$$

$$= 6\,m.\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 6.\sqrt{2}\,m$$

Cálculo del lado "c":

$$\frac{6}{sen\ 30^0} = \frac{c}{sen\ 105^0}$$

$$c = 6\ m.\frac{sen\ 105^0}{sen\ 30^0}$$

$$= 6\ m.\frac{0.965\,926}{\frac{1}{2}}$$

$$= 11,59\ m$$

CAPÍTULO III
FÍSICA VECTORIAL

Ing. Marcelo Nelson Navarro Ojeda, PhD
Ing. Juan Rafael Pérez Pupo, PhD

No hay filosofía que no esté basada en el conocimiento de los fenómenos, pero para obtener algún beneficio de este conocimiento es absolutamente necesario ser un matemático.
Daniel Bernoulli

3.1. INTRODUCCIÓN A LAS MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

En el capítulo I, "Las mediciones. Magnitud física. Incertidumbre en las mediciones. Precisión y exactitud", habíamos definido el importante concepto de magnitud física. Decíamos, de forma general, que magnitud física es todo aquello que se puede medir, que se puede representar por un número y su unidad; de esta forma, podemos medir el tiempo de duración de un evento determinado, como pudiera ser una fase experimental; la velocidad y/o aceleración, o la fuerza aplicada a un cuerpo, partícula o sistema desplazándose por el espacio; la viscosidad o densidad de una sustancia; la longitud, área o volumen o masa de cuerpos sólidos, líquidos o gaseosos, según sea el caso; la presión ejercida sobre una superficie o la que alcanza un gas en un recipiente cerrado; la cantidad de calor, el trabajo o energía que posee un cuerpo o sistema. Todas las magnitudes anteriormente citadas son magnitudes físicas, cada una de las cuales con sus características y sistemas de unidades propios [23, 22].

El capítulo II trató de un tema no menos importante: "Teorema de Pitágoras y elementos de trigonometría". Y se afirmaba, no sin razón, que este milenario teorema ha venido a resolver infinidad de problemas en las ciencias exactas(3.1) (puras, duras o fundamentales). El término ciencia es muy amplio; y, de forma general, agrupa las ciencias experimentales: que permiten demostrar sus hipótesis por medio de experimentos y las no experimentales: que parten de axiomas, que posibilitan desarrollar deducciones que no hallan sustento en la realidad sensible [63]. Como decíamos anteriormente, este término agrupa un amplísimo espectro de ramas del saber, donde se destacan significativamente ciencias exactas como la Matemática, la Física y la Química. No pocos autores dentro de la clasificación anterior de "ciencias exactas" experimentales y no experimentales, además de las clásicas experimentales anteriormente citadas, nombran también a la Termodinámica, Biología, Fisiología, Lógica, Bioquímica, Farmacología, Computación, Oceanografía, Medicina, Agricultura, Arquitectura, Astronáutica. Biotecnología. Ciencias de la comunicación, dándoles el nombramiento de *ciencias aplicadas* a algunas de estas [63-66].

En resumen, si fuéramos a conceptualizar el término ciencia, podríamos decir que se trata de un cuerpo de conocimientos ordenados sistémicamente, que permite describir realidades, posibilitando hallar repuestas a múltiples interrogantes.

El tema que nos ocupa, en este tercer capítulo, también reviste especial interés por su enorme aplicación en el campo de la física y las ingenierías: *física vectorial*.

No en pocas ocasiones se observa confusión entre los estudiantes a la hora de conceptualizar o distinguir una magnitud escalar de una vectorial. En su confusión, nombran a las magnitudes tiempo, viscosidad o cantidad de calor como magnitudes vectoriales; mientras que a la fuerza o velocidad, como escalares.

(3.1) Ciencias exactas: "Ciencias que producen conocimiento científico a partir de modelos teóricos aplicados, empíricos, cuantificables, por lo general experimentales, que se basan en los pasos del método científico y en la objetividad como los mecanismos para comprender sus diferentes áreas de estudio" (https://www.ejemplos.co/10-ejemplos-de-ciencias-exactas/#ixzz5PIvuXoJH).
"Disciplinas que se basan en la observación y experimentación para crear conocimientos y cuyos contenidos pueden sistematizarse a partir del lenguaje matemático. Este conjunto se diferencia de las ciencias aplicadas a raíz de la naturaleza práctica de estas últimas" (https://definicion.de/ciencias-exactas/).

Inicialmente, no alcanzan a distinguir que las magnitudes escalares son aquellas expresadas por un número y su unidad solamente, mientras que las magnitudes escalares, aparte de su valor modular y unidad están dotadas de dos importantes cualidades: su dirección y sentido.

3.2. MAGNITUDES ESCALARES. DEFINICIÓN, EJEMPLOS

Las magnitudes escalares pueden ser muy diversas en el campo de la física y las ingenierías. Las mismas representan cualidades muy disimiles de los objetos o sistemas.

3.2.1. Definición del escalar físico

Ante todo, preguntémonos qué es una magnitud escalar.

En física, podríamos definir como escalar a aquella magnitud que se puede representar por un número real, acompañado de su unidad (básica o derivada). Esta cantidad normalmente se traduce como un segmento de recta sobre un eje de coordenadas. Por solo citar algunos ejemplos, podríamos referirnos a:

El tiempo: 5 s

La masa: 7 kg

La temperatura: 10 °C

La densidad: 200 kg/m^3

Numerosos publicaciones coinciden con esta definición: “Estas magnitudes pueden definirse únicamente por medio de un número que exprese su medida” [21]. “Se las puede representar mediante segmentos tomados sobre una recta a partir de un origen y de longitud igual al número real que indica su medida” [27]. “Cuando una cantidad física se describe con un solo número, decimos que es una cantidad escalar” [67]. “Muchas cantidades como la masa, el tiempo y la temperatura no tienen dirección asociada a ellas, y quedan completamente especificadas con un número (mayor o menor que cero) y unidades. Tales cantidades se denominan cantidades escalares" [68], etc.

3.2.2. Magnitudes escalares

Algunas de las magnitudes escalares de más frecuente uso en la física y las ingenierías son las siguientes:

Tiempo: independientemente de las condiciones en que se realice la medición, este puede estar dado en segundos, minutos u horas.

Temperatura: es la propiedad que se iguala entre todos los cuerpos que están en equilibrio térmico entre sí; esta puede variar de un cuerpo a otro; y al mismo tiempo, si estos interactúan, puede producirse una transferencia energética de calor, mientras observen una diferencia de temperatura. Podríamos decir que se dividen en dos categorías: absolutas y relativas. La absoluta se mide en grados kelvin (K); y en las relativas se tienen dos escalas de medición: una en grados celsius o centígrados (°C) y la otra en grados farenheit (°F).

Masa: es una propiedad intrínseca de los objetos o sistemas, que expresa la inercia o resistencia al cambio de movimiento de un cuerpo. Y tal y como la conceptualizara Newton, se refiere a la cantidad de materia que poseen estos. Se puede medir mediante un valor fijo en cualquiera de los dos sistemas mayormente utilizados el SI: kilogramo (kg), gramo (g), miligramo (mg), etc., o el anglosajón: libra (lb), onza (oz), etc.

Longitud: cantidad de una medida del largo de una cosa o distancia. Si se utiliza el Sistema Internacional de Unidades (SI), puede expresar en metros (m), como unidad básica, o a través de sus submúltiplos: decímetro (dm), centímetro (cm), milímetro (mm), micrómetro (μm), etc., o sus múltiplos: decámetro (dam), hectómetro (hm), kilometro (km), etc.). También algunos países suelen utilizar el sistema inglés o anglosajón; cuyas unidades son: pulgada (in), pies (ft), yarda (yd), milla (mi), etc.

Área: magnitud bidimensional: superficie. Puede expresarse en metros cuadrados (m^2), pie cuadrado (ft^2), según sea el sistema (SI o inglés) y escala usados.

Volumen: espacio tridimensional que ocupa un cuerpo sólido, líquido o gaseoso. Puede expresarse en metro cúbico (m^3), pie (ft^3), según sea el sistema (SI o inglés) y escala usados.

Densidad: relaciona dos magnitudes: la masa —unidad básica del SI, cuya unidad es el kilogramo (kg)— y el volumen, que posee una unidad derivada: el metro cúbico (m^3). También se puede expresar utilizando múltiplos o submúltiplos en ambos sistemas: el internacional y el inglés; al igual que el resto de las magnitudes físicas.

Viscosidad: de forma general, puede decirse que es la resistencia que oponen las moléculas de un líquido a separarse debido a las fuerzas de adherencia: nivel de cohesión que mantienen estas. Puede denominarse también como fricción interna. Existen dos tipos: la viscosidad dinámica (absoluta), que es la resistencia interna al cizallamiento entre las moléculas en un fluido en movimiento (relación entre el esfuerzo cortante y el gradiente de velocidad); en el Sistema Cegesimal de Unidades (CGS) se expresa en poise (P) o centipoise (cP) —equivalente a un g·(s·cm)−1—; y la viscosidad cinemática: que relaciona la viscosidad dinámica con la densidad del líquido, expresada en stoke (St) o centistoke (cSt) —igual a un $cm^2.s^{-1}$—. Cuando se habla de viscosidad, se debe hacer referencia a la temperatura a la que fue medida esta. En el Sistema Internacional de Unidades, la viscosidad dinámica se expresa en pascal-segundo (Pa.s); y la viscosidad cinemática, en metros cuadrados por segundo ($m^2.s^{-1}$).

Frecuencia: mide el número de repeticiones de un fenómeno o acontecimiento periódico por unidad de tiempo transcurrido. Su unidad es el hercio: Hz; $1Hz = s^{-1}$.

Presión: relación de dos magnitudes físicas derivadas: la fuerza (N) y el área (m^2). Su unidad es el pascal: Pa.

Potencia: cantidad de trabajo realizada por unidad de tiempo. En el SI su unidad es el vatio y se expresa con el símbolo (W) —equivalente a un J.s-1—; en el inglés se toma como unidad el caballo de fuerza (hp); también se usa el término caballo de vapor (CV).

Energía: se define como la capacidad para actuar física o químicamente de la materia. En el SI se mide en julios (J). También es usual encontrarla en calorías (cal), kilo calorías (kcal), etc.

Trabajo: cuando se altera el estado de reposo o movimiento de un cuerpo a través de una fuerza que le ocasiona un determinado desplazamiento. Se expresa como unidad derivada del SI en joule (J).

Calor: energía interna intercambiada entre los cuerpos y/o sistemas. Es energía de tránsito que se expresa igualmente en joule (J).

3.2.2. Cómo representar gráficamente las magnitudes escalares

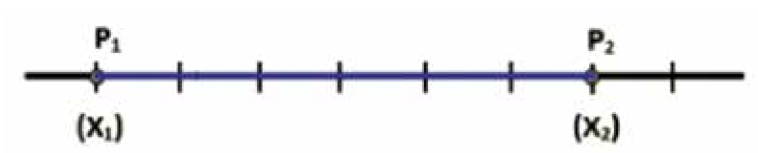
Al inicio, se precisaba que estas magnitudes se podían representar como segmentos de recta a partir de un origen y de longitud igual al número real que indicaba su medida [27]. Es decir, podemos trazar funciones lineales en cualquier tipo de sistema de coordenadas: unidimensional, bidimensional (en ejes de coordenadas cartesianas, rectangulares u ortogonales) o tridimensional.

3.2.2.1. Sistema de coordenadas unidimensional o lineal

Se representa por una recta acotada por dos puntos: P_1 (X_1) y P_2 (X_{jj}).

Pongamos por ejemplo, que queremos representar la distancia desde el punto P1 al P2, que posee una longitud de seis unidades (ver fig. 3.1).

Fig. 3.1. Representación gráfica de un segmento de recta no orientado



Matemáticamente, la longitud del segmento $(\overline{P1P2})$ queda determinada según la fórmula (3.1).

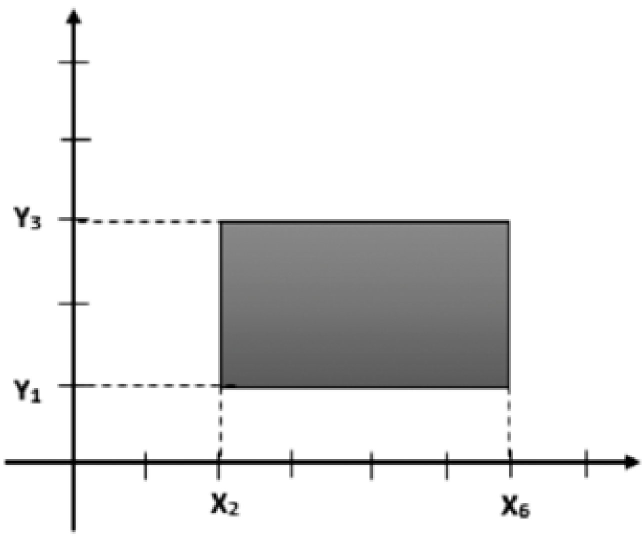
$$|\bar{P_1}\bar{P_2}| = |X_2 - X_1| \tag{3.1}$$

3.2.2.2. Sistema de coordenadas bidimensional

Sistema de coordenadas ortogonales, bidimensional o cartesiano: en este caso se precisa de un sistema de coordenadas con ejes ortogonales en “x” y “y”.

Pongamos por ejemplo, que deseamos determinar la superficie (área) de un determinado objeto (ver fig. 3.2). Estas representaciones en el plano pueden ser regulares o irregulares. El área bajo la curva obedece al tipo de modelo matemático en cuestión, ya sea este lineal, cuadrático, etc.

Fig. 3.2. Representación gráfica de un modelo bidimensional: superficie o área



Analíticamente el área queda determinada según el modelo matemático (3.2). Observe que el resultado y la operación están representados modularmente, es decir, en su valor absoluto. Independientemente, aunque se produzca el fenómeno de dilatación o contracción térmica, este continuará siendo positivo.

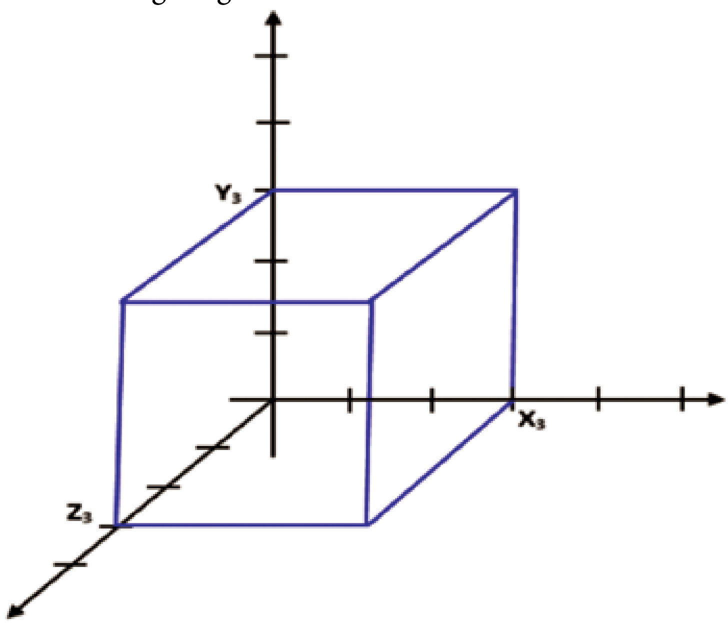
$$|A| = |X_6 - X_2| . |Y_3 - Y_1| \tag{3.2}$$

3.2.2.3. Sistema de coordenadas tridimensional

Sistema de coordenadas tridimensional: permiten representar figuras en tres ejes.

Si quisiéramos representar el volumen de un objeto que posee una forma cúbica, pues solo basta fijar el valor de cada lado en el eje de coordenadas correspondiente. En el ejemplo que se presenta en la figura 3.3, puede observarse el volumen de un cubo de 3 x 3 x 3 unidades.

Fig. 3.3. Representación gráfica de un modelo tridimensional: figura geométrica denominada cubo



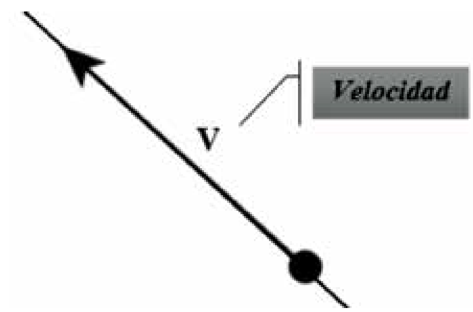
El modelo matemático que se asocia a este tipo de figura geométrica es el que se muestra en ecuación (3.3). Igualmente, en esta ocasión, al obtenerse un producto modular, el volumen siempre será positivo (que no debe confundirse cuando se produce un decrecimiento del volumen. No obstante, cuando se resta el volumen de contracción del inicial, igualmente la respuesta será positiva; solo que resulta más pequeño). El incremento o decremento de un volumen es un fenómeno de dilatación o contracción debido a la trasferencia de calor. Este aspecto será estudiado en capítulos posteriores.

$$|V| = |X_3 - X_0|.|Y_3 - Y_0|.|Z_3 - Z_0| \tag{3.3}$$

3.3. MAGNITUDES VECTORIALES. DEFINICIÓN, EJEMPLOS

Las magnitudes vectoriales nos ayudan a comprender el comportamiento de determinados objetos o sistemas; toda vez que nos representan diferentes fenómenos, como por ejemplo las características del movimiento de estos. En la figura 3.4 se muestra el vector velocidad; igualmente podría tratarse de una fuerza o aceleración.

Fig. 3.4. Representación gráfica del vector velocidad



3.3.1. Definición de magnitud vectorial

Podríamos decir, de la forma más simplificada, que un vector físico no es más que un segmento de recta orientado. Es decir, que además de poseer su característica modular, posee además otros atributos, según lo anteriormente dicho; al ser un segmento orientado tiene un punto de origen y el extremo final.

Respecto a la definición dada, existe una similitud conceptual en lo que manifiestan diferentes autores o fuentes, en general.

3.3.2. Ejemplos de magnitudes vectoriales

Fuerza: magnitud física que produce modificación de la forma, posición o cantidad de movimiento de un cuerpo, partícula o sistema. Su unidad derivada del SI es el newton (N), dado en sus unidades básicas se expresa como: kg.m/s2. Al ser un vector, posee un punto de aplicación, orientación y un valor modular.

Peso: caso especial de una fuerza que es ejercida como consecuencia de la atracción gravitacional. Se representa como aquel segmento de recta orientado tomando como origen el centro de gravedad del objeto y dirigido al centro de gravedad de la Tierra. El peso es una magnitud relativa, pues depende del campo gravitacional. Un objeto en la Tierra peso seis veces más que en la Luna, pues esta posee una fuerza gravitacional seis veces menor a la de la Tierra.

Inercia: se trata, al igual que el peso, de una fuerza especial, que tiende a mantener el cuerpo, partícula o sistema en su posición de reposo o movimiento rectilíneo uniforme. En el caso de un cuerpo, apoyado en una superficie, y que se le aplique una fuerza, es fácil de comprender, que inmediatamente aparecerá una fuerza de rozamiento que se opone al movimiento, cumpliéndose de esta forma la tercera ley de Newton (la fuerza de rozamiento aumentara gradualmente en función del coeficiente de rozamiento y la componente normal del peso).

Velocidad: es la razón de cambio del vector desplazamiento; es la magnitud física de carácter vectorial que relaciona el cambio de posición con el tiempo. Al módulo de esta magnitud física se le conoce con el nombre de celeridad o rapidez. La velocidad se expresa en metros por segundos (m/s) según el SI, en una determinada dirección y sentido. Matemáticamente es la primera derivada del espacio respecto al tiempo (ds/dt).

Aceleración: se conceptualiza como la variación de la velocidad respecto al tiempo; matemáticamente se expresa como la segunda derivada del espacio respecto al tiempo (d^2s/dt^2). La aceleración puede tomar un valor negativo: desaceleración; es decir, expresaría la disminución de la velocidad en función del tiempo. La aceleración puede ser tangencial (variación de rapidez respecto al tiempo) o normal o centrípeta (cambios de dirección respecto al tiempo). También se puede hablar de aceleración media: cambio promedio de la rapidez en un determinado lapso de tiempo). También se habla de la aceleración centrífuga que experimentan los cuerpos dentro de un sistema de rotación. Y finalmente no olvidar la aceleración de Coriolis: aceleración relativa de un cuerpo en movimiento respecto a un sistema de referencia de rotación.

Torsión: comúnmente denominada "torque". Expresa la medida de variación de la dirección del vector fuerza respecto a una curvatura. Una fuerza ejercida sobre el extremo de un brazo o palanca realiza un torque.

Existen otras magnitudes vectoriales que también serían bueno recordar:

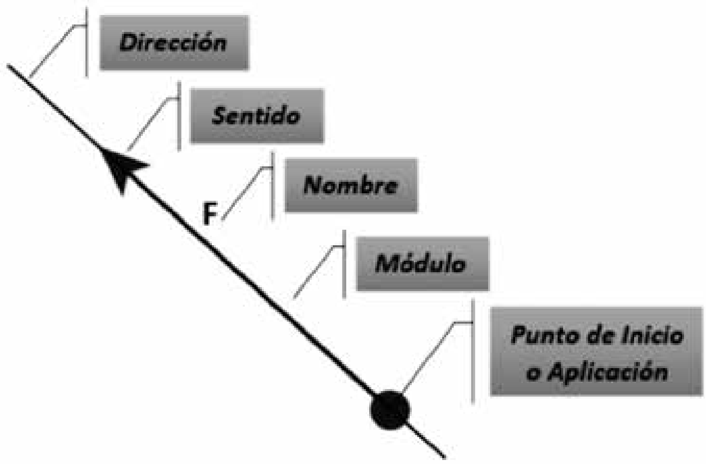
Campo eléctrico: campo vectorial; un conjunto o relación de fuerzas físicas (eléctricas) que ejercen influencia sobre un área determinada y, en consecuencia, modifican la carga eléctrica en su interior.

Campo gravitatorio: campo físico; ejerce una atracción sobre los objetos o partículas que ingresen al área de influencia. Necesita un conjunto de vectores fuerza para representarse.

3.3.3. Elementos que definen un vector

Si bien un escalar físico queda determinado por un número real acompañado por una unidad (básica, derivada o combinación de ambas), según la magnitud de que se trate; como se puede observar en la figura 3.5, el vector además de estas importantes características posee los atributos de dirección y sentido, y un punto de aplicación.

Fig. 3.5. Representación gráfica del vector con sus partes componentes



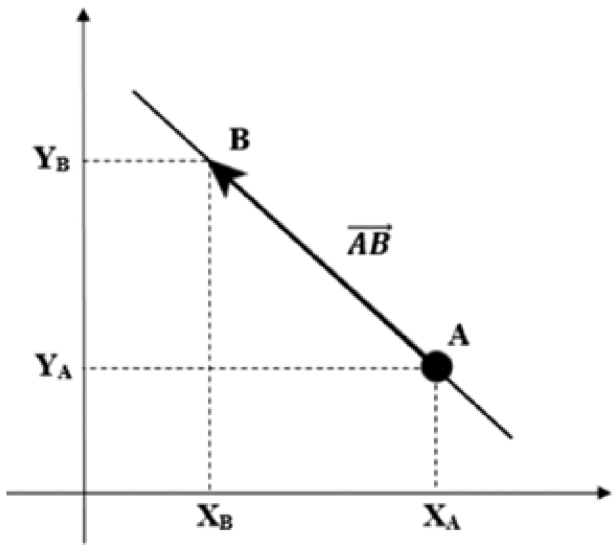
3.3.4. Forma de notación y posición de un vector en el plano. Vectores R2

La notación de un vector puede hacerse de diferentes maneras; o bien con una letra, como se muestra en la figura 3.4 o ayudándonos de letras que indiquen los puntos de inicio y final. En la figura 3.6, se puede ver el vector AB utilizando la segunda forma de notación.

¿Cómo indicar analíticamente el posicionamiento del vector en el plano? Resulta muy fácil si conocemos las coordenadas de cada punto; tal y como se indica en la figura 3.6. Conocida la posición de los puntos A y B, el vector AB queda definido en el plano según la ecuación 3.4.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (x_B - x_A \, , y_B - y_A) \tag{3.4}$$

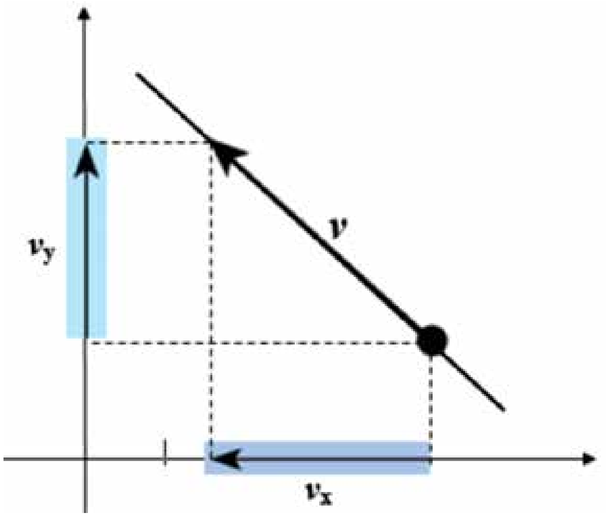
Fig. 3.6. Posicionamiento y notación de un vector en el plano cartesiano



Pero no existe esa sola forma de escribir analíticamente un vector con posicionamiento bidimensional. También podemos escribirlo a través de sus componentes rectangulares, una vez que hayamos proyectado el vector sobre los ejes cartesianos (ver figura 3.7 y ecuación (3.5)).

$$\vec{v} = (v_x, v_y) \tag{3.5}$$

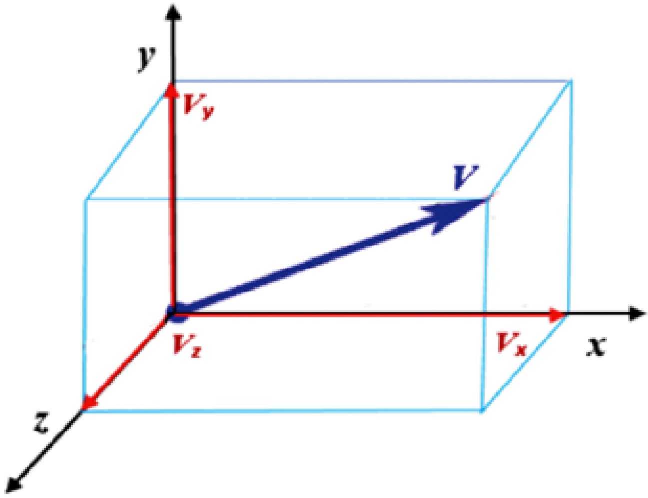
Fig. 3.7. Proyección del vector v en el plano cartesiano



3.3.5. Forma de notación y posición de un vector en el espacio. Vectores R3

Un vector puede ser representado en el espacio utilizando coordenadas tridimensionales, cuya descomposición no es más que la suma de tres vectores, a lo cual se le denomina descomposición canónica de un vector [27]. Veamos el siguiente ejemplo, que se presenta en la figura 3.8, auxiliados de las componentes rectangulares del vector, una vez proyectado este sobre los ejes de coordenadas.

Fig. 3.8. Proyección del vector v en el espacio, en coordenadas tridimensionales



En este caso, por estar el vector “v” en un espacio euclideo tridimensional, la expresión analítica (2.5) adquiere una componente más, en el eje “z”, y adopta la forma que se muestra en la Ec. (2.6).

$$\vec{v} = (v_x , v_y , v_z) \tag{3.6}$$

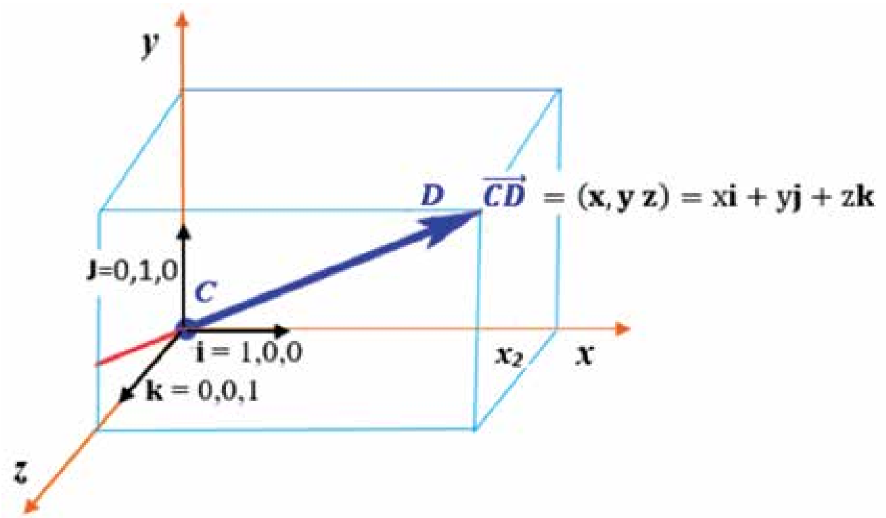
3.3.6. Definición de vector

Definición de vector: podemos afirmar que el módulo de un vector es la longitud del segmento (distancia entre dos puntos) que lo representa; siendo la misma proporcional a la intensidad de la magnitud representada; y siempre es una cantidad escalar positiva.

Definición de vector nulo: en el caso particular que el módulo del vector sea nulo (de módulo cero) el segmento se reduce automáticamente a un punto; y ya no podrá hablarse de un vector, pues el mismo carece de dirección y sentido.

Definición de vector unitario: en el caso de tratarse de un vector unitario, por ejemplo $\vec{v}$, su módulo es uno (1); es decir, $|\vec{v}|=1$. Este vector no posee unidades y su fin es marcar una dirección [(69)]; de tal forma que los vectores unitarios i, j y z tienen la dirección en los respectivos ejes "x", "y" y "z". (ver figura (3.9).

Fig. 3.9. Representación de los vectores unitarios i, j y k

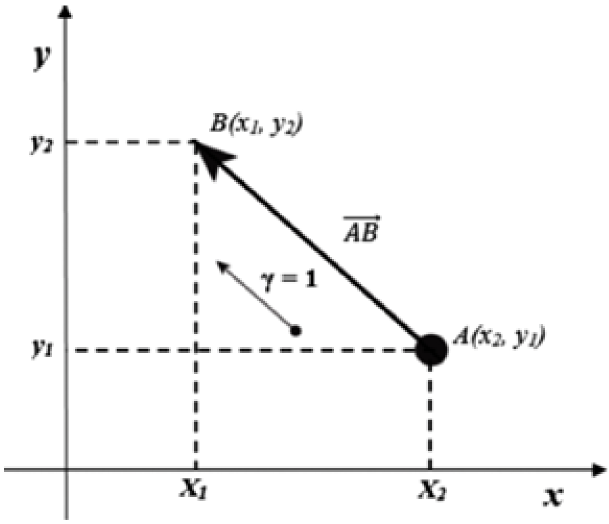


Como se puede observar en la figura anterior, el vector ($\overrightarrow{CD}$) está definido por los módulos (x, y, z) de sus componentes ortogonales (x, y, z), y su dirección y sentido lo definen sus vectores unitarios (i, j, k). (ver ecuación. (3.7)).

$$\mathbf{CD} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathrm{x}\mathbf{i} + \mathrm{y}\mathbf{j} + \mathrm{z}\mathbf{k} = \mathrm{x}(1,0,0) + \mathrm{y}(0,1,0) + \mathrm{z}(0,0,1) \qquad (3.7)$$

Necesariamente, el vector unitario no tiene que tener su inicio en el origen de los ejes coordenados; simplemente se trata de un vector unitario, que podemos situarlo en el propio vector o paralelo al mismo, siempre y cuando guarden el mismo sentido.

Fig. 3.10. Representación gráfica del vector: ($\overrightarrow{AB}$) y su vector unitario γ



En la figura. 3.10 se observa el vector (AB) y su vector unitario γ, el cual se encuentra paralelo a este, guardando su misma dirección y sentido.

3.3.7. Notación del vector y su módulo

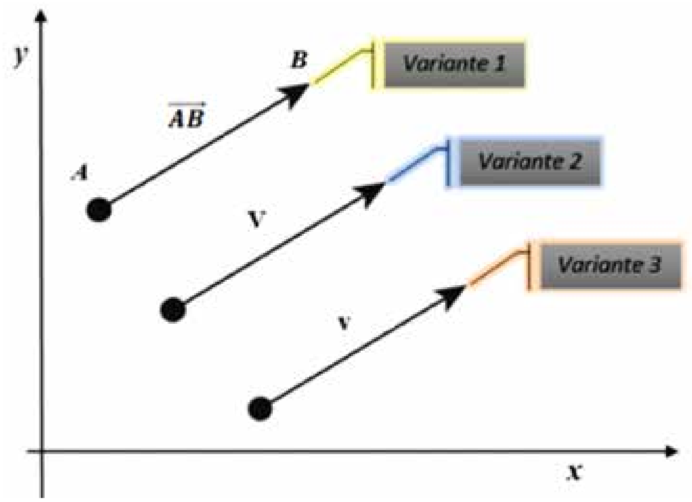
En la descripción de las características de un vector, pudimos constatar que el mismo estaba dotado de un módulo.

Entonces, ¿que representa exactamente el módulo de un vector?

¿De cuántas maneras podemos realizar la notación de un vector y su módulo?

La notación del vector y su módulo puede realizarse de diferentes maneras. Apoyémonos en la figura. (3.11).

Fig. 3.11. Notación de los vectores equipolentes[3.2] ($\overrightarrow{AB}$), V y v



(3.2) Vectores equipolentes: cuando poseen igual módulo, dirección y sentido.

Algo que debemos tener presente es que, en los textos escritos, las magnitudes vectoriales se representan con letras en **negritas**, mientras que las magnitudes escalare, lo hacen con letras en cursivas. Aclarado este punto, veamos las diferentes variantes:

Variante 1: si el vector **AB** posee su origen en A y su extremo en B se representa como el segmento orientado: $(\overrightarrow{AB})$; y, correspondientemente su módulo será : $|(\overrightarrow{\mathrm{AB}})|$

Variante 2: el vector puede recibir una notación valiéndonos de una letra mayúscula en negritas: **V**; y su módulo correspondientemente será: $|\mathbf{V}|$

Variante 3: el vector también puede recibir una notación utilizando una letra minúscula en negritas: ; y su módulo: $|\mathbf{v}| = v$

Variante 4: existe una cuarta posibilidad y es anteponiendo el prefijo “mod” al vector notado con una letra mayúscula o minúscula, en negritas: mod **V**; mod **v**

En este caso, en que los vectores son equipolentes, se pueden escribir: $(\overrightarrow{AB}) = \mathbf{V} = \mathbf{v}$; y sus correspondientes módulos como: mod **V**= mod **v** = $|\mathbf{V}| = |\mathbf{v}| = |(\overrightarrow{\mathrm{AB}})|$.

3.3.8. Modelos matemáticos del módulo del vector en R^2 y R^3

Por el Teorema de Pitágoras podemos hallar muy fácilmente el valor del módulo del vector, toda vez que el mismo representa la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Usando las ecuaciones (2.1), (3.5) y (3.6) y las representaciones gráficas (3.7) y (3.8) obtendremos las expresiones analíticas (3.8) y (3.9), para los modelos bidimensionales y tridimensionales respectivamente.

Modelo bidimensional: módulo de un vector en R^2

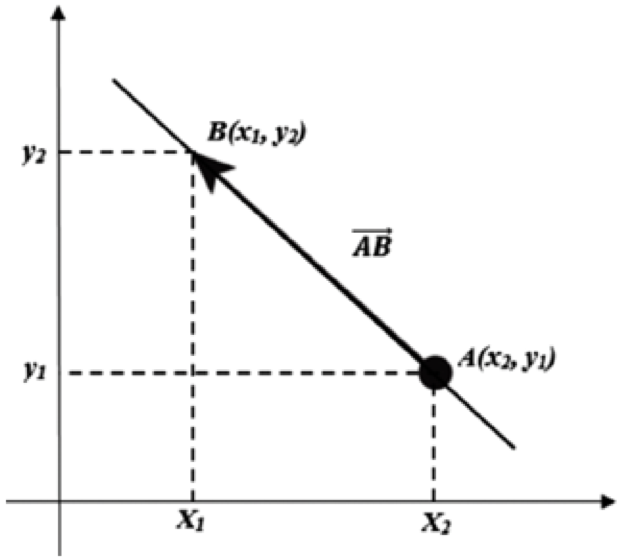
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{3.8}$$

Modelo tridimensional: módulo de un vector en R^3

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{3.9}$$

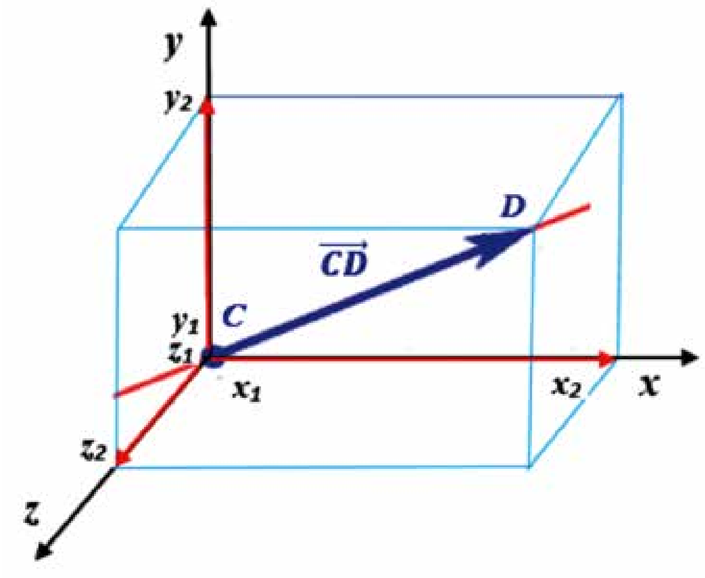
Puede darse el caso que no conozcamos las proyecciones ortogonales del vector, pero si su punto de origen y final (ver figuras 3.12 y 3.13). En ese caso se opera de la manera que se indica en las ecuaciones (3.10) y (3.11).

Fig. 3.12. Indicación de los puntos de inicio y final del vector AB, en el plano



$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{3.10}$$

Fig. 3.13. Indicación de los puntos de inicio y final del vector AB, en el espacio



$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{3.11}$$

3.3.9. Ejemplos de cálculo del módulo de vectores en R2 y R3

Ejemplo 1:

Dado los vectores: $\vec{v}$=(5 ,7) y $\vec{u}$=(4 ,6,12), halle el valor del módulo de los mismos, atendiendo a sus proyecciones ortogonales.

Sustituyendo los valores dados en las ecuaciones (3.7) y (3.8) se llegará a obtener los valores deseados:

$$|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74} = 8{,}60$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 12^2} = \sqrt{194} = 13{,}93$$

Ejemplo 2:

Atendiendo a las coordenadas de los puntos A = (2 ,5,) y B = (3,7) del vector $|(\overrightarrow{AB})|$ (figura 3.9) y C = (0,0,0) y D = (5 ,4,3) del vector $|(\overrightarrow{CD})|$ (figura 3.10), respetivamente, halle el valor del módulo de los mismos.

Solución:

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}| = \sqrt{(3-2)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{1+4}$$

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}| = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}| = \sqrt{(5-0)^2 + (4-0)^2 + (3-0)^2}$$

$$= \sqrt{25+16+9} = \sqrt{50}$$

$$= 5\sqrt{2}$$

3.3.10. Suma y resta de vectores

3.3.10.1. Generalidades

La suma y resta de vectores resulta un tema, además de interesante, muy útil para todas las carreras de ingeniería.

No podemos olvidar algo ya aprendido y muy importante, y es que las matemáticas constituyen una herramienta fundamentalísima para poder explicar el comportamiento de los fenómenos físicos. En este caso particular, el áalgebra lineal y la geometría analítica constituyen dos poderosísimos recursos matemáticos para poder interpretar el comportamiento de múltiples fenómenos, tanto en la cinemática como en la dinámica de las partículas, cuerpos o sistemas; pues cuando estamos analizando los muy variados problemas donde intervienen fuerzas, velocidades, aceleraciones, etc., estamos hablando de magnitudes vectoriales; magnitudes que poseen módulo, dirección, sentido, etc.; magnitudes, que cada una de las cuales, en la práctica, se suman en su acción si coinciden sus direcciones y sentido; y se restan si se contraponen.

¿Cómo podemos llevar a cabo estas operaciones?

¿Cómo interpretar y resolver este importantísimo problema ayudados por las matemáticas?

Veamos.

Las operaciones de suma y resta de vectores pueden llevarse a cabo de dos formas; que aunque distintas, nos permiten arribar a los mismos resultados. Estamos hablando del método analítico y del método gráfico.

3.3.10.2. Método analítico de la suma de vectores en R^2 y R^3. Propiedades. Ejercicios

En cualquiera de las dos situaciones, suma de vectores en R^2 y R^3, en las mismas se procederá de la misma manera: miembro a miembro; es decir, sumamos las componentes respectivas de "X", las de "Y" y/o las de "Z", según sea el caso.

El resultado será la obtención de un nuevo vector resultante donde puede variar no solamente el módulo del mismo, sino también su dirección y sentido.

Propiedades de la suma de los vectores

La suma de vectores goza de las siguientes propiedades:

Conmutativa: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

Asociativa: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

Elemento neutro o vector 0: $\mathbf{a} + 0 = 0 + \mathbf{a} = \mathbf{a}$

Elemento simétrico u opuesto a': $\mathbf{a} + \mathbf{a'} = \mathbf{a'} + \mathbf{a} = 0$; $\mathbf{a'} = -\mathbf{a}$

Veamos el siguiente ejemplo de la suma de dos vectores en R2 y R3 donde nos dan las proyecciones ortogonales de los mismos:

Suma de los vectores en R^2: $\vec{\mathbf{a}}\,(a_1, a_2)$ y $\vec{\mathbf{b}}\,(b_1, b_2)$

Suma de los vectores en R^3: $\vec{\mathbf{a}}\,(a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{\mathbf{b}}\,(b_1, b_2, b_3)$

Como decíamos que la suma la llevaríamos a cabo miembro a miembro, procedemos de tal forma y obtenemos las Ec.ecuaciones (3.12) y (3.13).

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = [(a_1 + b_1), (a_2 + b_2)] \tag{3.12}$$

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = [(a_1 + b_1), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3)] \tag{3.13}$$

A continuación, se expondrán los desarrollos de la suma de vectores en R^2 y R^3, primero nominalmente y posteriormente en ejemplos de aplicación, utilizando diferentes notaciones de los vectores.

1. Notación utilizando el vector con letra minúscula en negrita

Determine el vector suma resultante r, partiendo de los vectores:

Vectores en R^2

a = (a1, a2)

b = (b1, b2)

Solución:

1.ª forma:

r = **a** + **b** = (a1, a2) + (b1, b2)

= (a1 + b1), (a2 + b2)

2.ª forma:

a = (a1, a2)

b = (b1, b2)

r = (a1 + b1), (a2 + b2)

Ejemplo 1:

a = (3 , -6)

b = (2 , - 4)

r = (5, -10)

Vectores en R^3

a = (a1, a2, a3)

b = (b1, b2, b3)

Solución:

1.ª forma:

r = **a** + **b** = (a1, a2, a3) + (b1 , b2, b3)

= (a1 + b1), (a2 + b2), (a3 + b3)

2.ª forma:

a = (a1, a2, a3)

b = (b1, b2, b3)

r = (a1 + b1), (a2 + b2), (a3 + b3)

Ejemplo 2:

a = (2 , -3 ,4)

b = (-3, 6, 2)

r =(-1, 3, 6)

2. Notación utilizando el vector con letra mayúscula en negrita

Determine el vector suma resultante: **R**, partiendo de los vectores

Vectores en R^2

A = (A1, A2)

B = (B1, B2)

Solución:

1.ª forma:

R = **A** + **B** = (A1, A2) + (B1, B2)

= (A1 + B1), (A2 + B2)

2.ª forma:

A = (A1, A2)

B = (B1, B2)

R = (A1 + B1), (A2 + B2)

Ejemplo 3:

A = (3, -6)

B = (2, - 4)

R =(5, -10)

Vectores en R^3

A = (A1, A2, A3)

B = (B1, B2, B3)

Solución:

1.ª forma:

R = **A** + **B** = (A1, A2, A3) + (B1, B2, B3)

= (A1 + A2), (B2 + B2), (A3 + B3)

2.ª forma:

A = (A1, A2, A3)

B = (B1, B2, B3)

R = (A1 + B1), (A2 + B2), (A3 + B3)

Ejemplo 4:

A = (2 , -3, 4)

B = (-3, 6, 2)

R = (-1, 3,6)

3. Notación utilizando el vector unitario

Los versores cartesianos (vectores unitarios) permiten expresar analíticamente los vectores por medio sus componentes cartesianas. En este tipo de notación se opera similarmente al caso anterior [(70)].

Determine el vector suma resultante: **R**, partiendo de los vectores:

$\mathbf{A} = A\mathbf{i} + A\mathbf{j}$

$\mathbf{B} = B\mathbf{i} + B\mathbf{j}$

Si ya hemos conceptualizado que la suma se realiza miembro a miembro, pues procederemos de tal forma:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A\mathbf{i} + A\mathbf{j}) + (B\mathbf{i} + B\mathbf{j})$$

$$= (A\mathbf{i} + B\mathbf{i}) + (A\mathbf{j} + B\mathbf{j})$$

Ejemplo 5:

Determine el vector suma resultante: **R**, partiendo de los vectores:

$\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

$\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

Solución:

Si ya hemos conceptualizado que la suma se realiza miembro a miembro, pues procederemos de tal forma:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) + (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$$

$$= (5\mathbf{i} + 3\mathbf{i}) + (6\mathbf{j} + 4\mathbf{j})$$

$$= 8\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$$

También podemos proceder de una forma bastante sencilla, siguiendo un procedimiento similar:

A = 5**i** + 6**j**

B = 3**i** + 4**j**

C = 8**i** + 10**j**

3.3.10.3. Método gráfico de la suma de vectores en R^2

En las operaciones de suma y resta de vectores en R^2 normalmente son utilizados los métodos gráficos del polígono y del paralelogramo

MÉTODO DEL POLÍGONO

Definición:

Método gráfico empleado para determinar la suma o resta vectorial de un sistema de vectores coplanarios. Consiste en trazar, a escala, un vector a continuación de otro (método cabeza y cola). El polígono finalmente se cierra el vector resultante, cuando se une el punto de aplicación inicial, del primer vector, con el extremo del último trazado. En las figuras 3.14 y 3.15, se muestran los vectores resultantes para uno y otro caso.

Fig. 3.14. Suma de dos vectores: **a** y **b** por el método del polígono

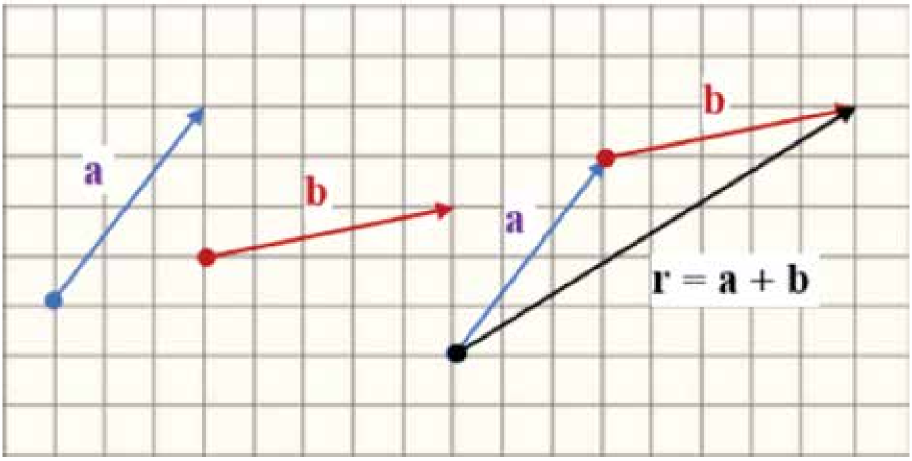
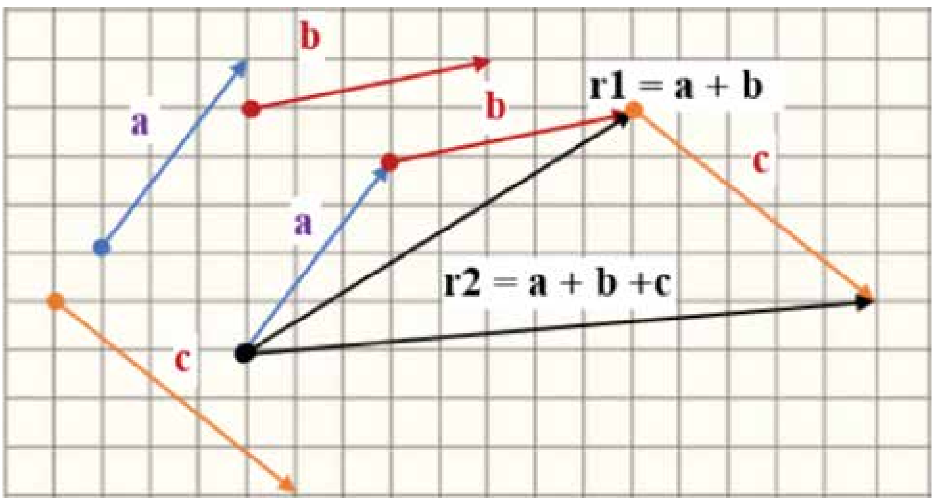


Fig. 3.15. Suma de tres vectores: **a**, **b** y **c** por el método del polígono

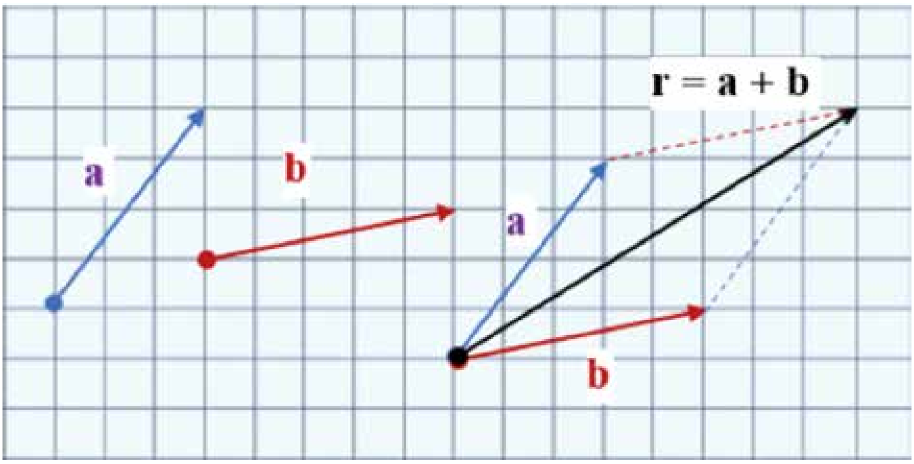


MÉTODO DEL PARALELOGRAMO

Definición:

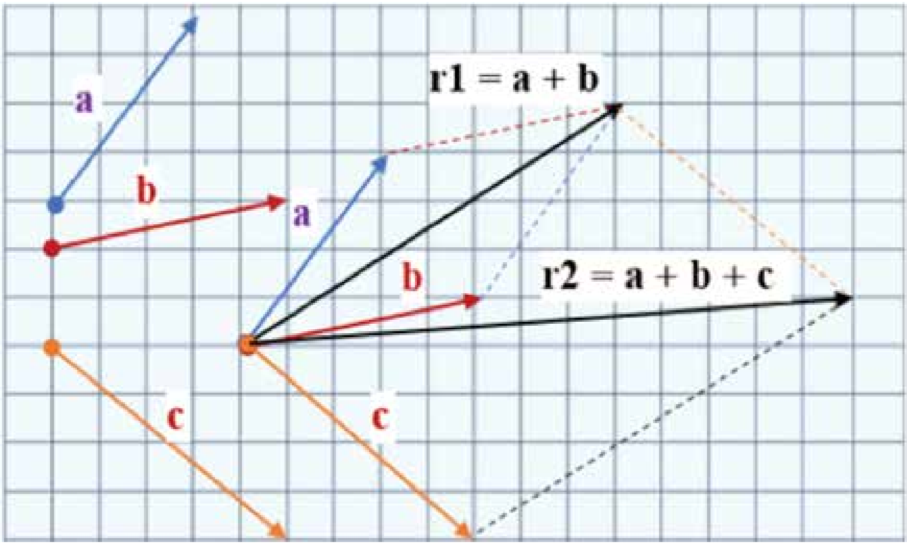
Método gráfico empleado para determinar la suma o resta vectorial de un sistema de vectores coplanarios. Consiste en trazar, a escala, un vector tomando un determinado punto origen; a continuación, en ese mismo punto, colocar el siguiente vector. Trazar paralelas a ambos vectores. Trazar el vector resultante, tomando el mismo origen y la flecha en el punto de intersección de las paralelas anteriormente trazadas. En las figuras 3.16 y 3.17, se muestran los vectores resultantes para uno y otro caso.

Fig. 3.16. Suma de dos vectores: **a** y **b** por el método del paralelogramo



Si utiliza este método gráfico, y posee más de un vector, tiene que tener en cuenta que el vector resultante final se obtiene por la suma del último vector con el último resultante obtenido (ver figura 3.17).

Fig. 3.17. Suma de tres vectores: **a**, **b** y **c** por el método del paralelogramo



3.3.10.4. Método analítico de la resta de vectores en R^2 y R^3

La operación resta en todos los casos no es más que la operación suma, pero con el signo cambiado. Veamos primero el desarrollo de forma literal y posteriormente un ejemplo numérico, tal y como lo vimos en la suma.

4. Utilizando la notación del vector con letra minúscula en negrita

Determine el vector resta resultante r, partiendo de los vectores:

Vectores en R^2

a = (a1, a2)

b = (b1, b2)

Solución:

1.ª forma:

r = **a** - **b** = (a1, a2) - (b1, b2)

= (a1- b1), (a2 - b2)

2.ª forma:

a = (a1, a2)

-**b** = -(b1, b2)

r = (a1 - b1), (a2 - b2)

Ejemplo 1:

a = (3 , -6)

b = (2 , - 4)

r = (3 - 2), (-6 - (-4)

r = (1, -2)

Vectores en R^3

a = (a1, a2, a3)

b = (b1, b2, b3)

Solución:

1.ª forma:

r = **a** - **b** = (a1, a2, a3) - (b1, b2, b3)

= (a1 - b1), (a2 - b2), (a3 - b3)

2.ª forma:

a = (a1, a2, a3)

-**b** = -(b1, b2, b3)

r = (a1-b1),(a2-b2),(a3-b3)

Ejemplo 2:

a = (2 , -3, 4)

-b = -(-3, 6, 2)

r = (2 -(-3), (-3 -6), (4 - 2)

r = (5, -9, 2)

5. Utilizando la notación del vector con letra mayúscula en negrita

Determine el vector resta resultante r, partiendo de los vectores

Vectores en R^2

A = (A1, A2)

B = (B1, B2)

Solución:

1.ª forma:

R = **A**- **B** = (A1, A2) - (B1, B2)

= (A1- B1), (A2 - B2)

2.ª forma:

A= (A1,A2)

-B = -(B1,B2)

R = (A1-B1),(A2-B2)

Ejemplo 3:

A = (3, -6)

-B = -(2, -4)

R = (3 - 2), (-6 -(-4)

R = (1, -2)

Vectores en R^3

A = (A1, A2, A3)

B = (B1, B2, B3)

Solución:

1.ª forma:

R = **A** - **B** = (A1, A2, A3) - (B1, B2, B3)

= (A1 - A2), (B2 - B2), (A3 - B3)

2.ª forma:

A = (A1, A2, A3)

-**B** = -(B1, B2, B3)

R = (A1 - B1), (A2 - B2), (A3 - B3)

Ejemplo 4:

A = (2,-3,4)

-B= -(-3,6 ,2)

R = (2- (-3), (-3 -6), (4 - 2)

R = (1, -9, 2)

6. Utilizando notación con vector unitario

En este tipo de notación, se opera similarmente de forma similar al caso anterior [(70)].

Determine el vector resta resultante C, partiendo de los vectores:

A = A**i** + A**j**

B = B**i** + B**j**

Si ya hemos conceptualizado que la suma se realiza miembro a miembro, pues procederemos de tal forma:

$\mathbf{R} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (A\mathbf{i} + A\mathbf{j}) + (B\mathbf{i} + B\mathbf{j})$

$= (A\mathbf{i} - B\mathbf{i}) + (A\mathbf{j} - B\mathbf{j})$

Ejemplo 5:

Determine el vector resta, resultante C, partiendo de los vectores:

$\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

$\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

Si ya hemos conceptualizado que la suma se realiza miembro a miembro, pues procederemos de tal forma:

$\mathbf{R} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) - (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$

$= (5\mathbf{i} - 3\mathbf{i}), (6\mathbf{j} - 4\mathbf{j})$

$= 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

Al igual que en la operación suma, podemos seguir un procedimiento similar:

$\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

$-B = -(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

$C = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

3.3.10.5. Método gráfico de la resta de vectores en R^2

El método de la resta, por el procedimiento gráfico, el concepto a que se aplica aplicar es el mismo que por el método analítico: suma vectorial con el signo cambiado; se opera igualmente de la misma manera (podrá observar como los vectores son contrarios: mantienen el mismo módulo y dirección, pero con sentido opuesto). A continuación, ilustraremos este importante aspecto utilizando los dos métodos antes vistos: polígono y paralelogramo.

Método del polígono

En las Figuras figuras de la 3.18 y 3.19, se muestran los ejemplos de la resta, en el caso de operar con dos vectores, utilizando el método del polígono.

Fig. 3.18. Resta de dos vectores: **a** - **b** por el método del polígono

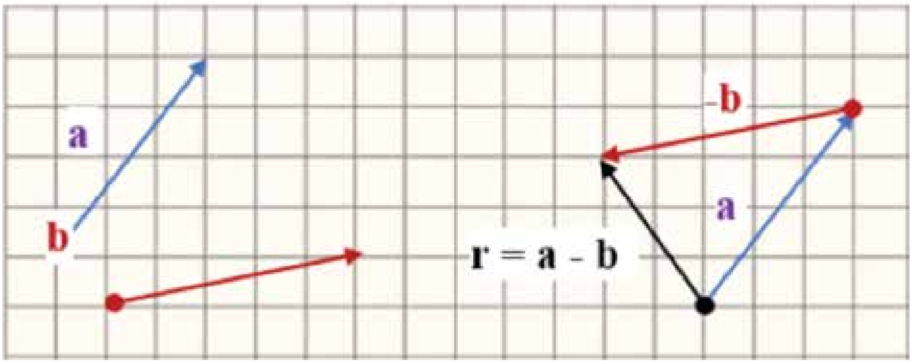
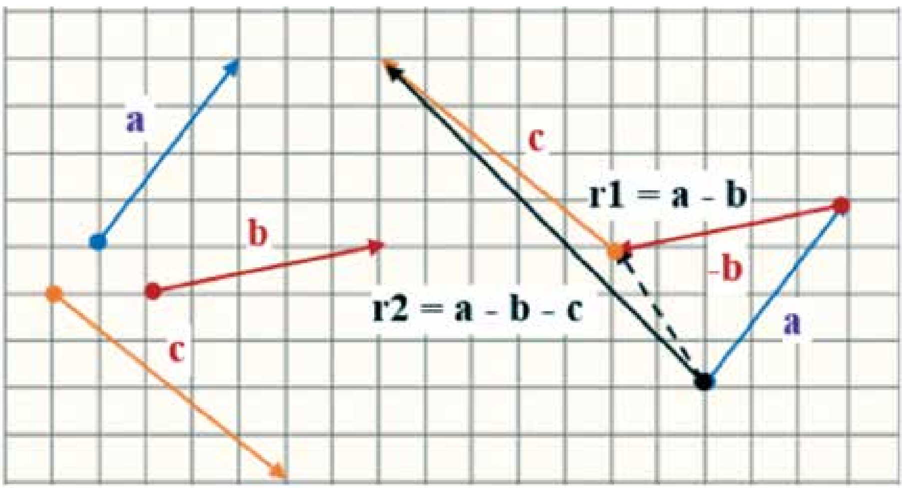


Fig. 3.19. Resta de más de un vector: **a** - **b** - **c** por el método del polígono



Método del paralelogramo

En las figuras de la 3.20 y 3.21, se muestran los ejemplos de la resta, en el caso de operar con tres vectores, utilizando el método del paralelogramo.

Fig. 3.20. Resta de dos vectores: **a** - **b** por el método del paralelogramo

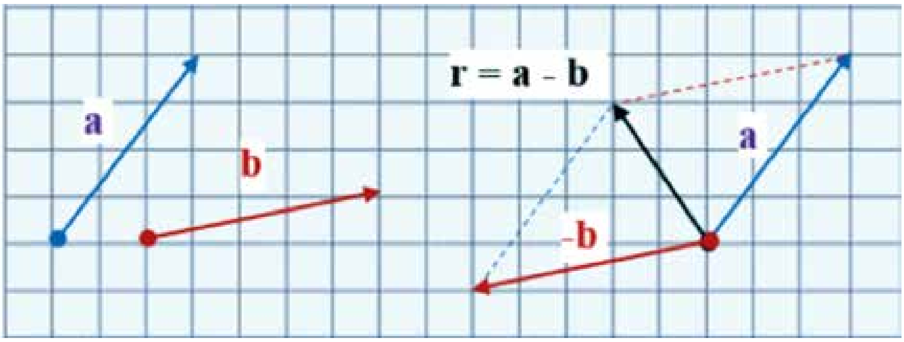
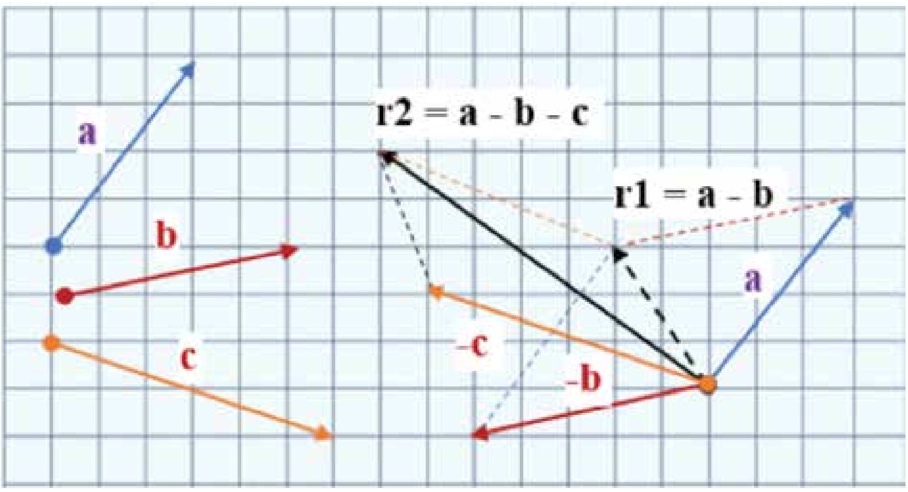


Fig. 3.21. Resta de más de un vector: **a** - **b** - **c** por el método del paralelogramo



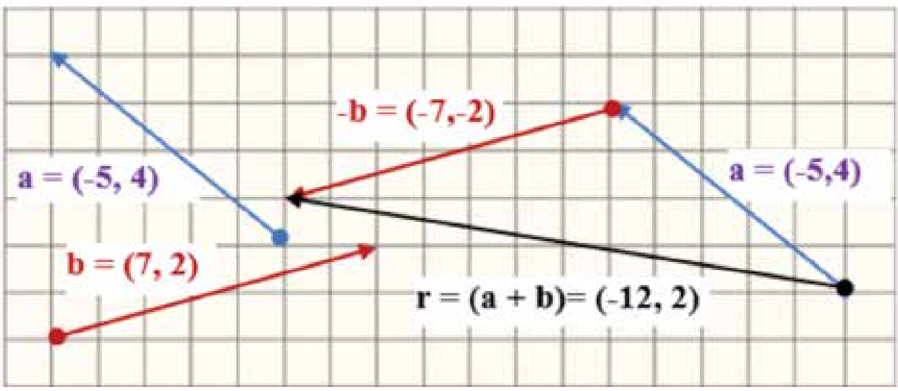
3.3.10.6. Ejercicios de aplicación de los métodos gráficos: polígono y paralelogramo, en la operación de la resta de vectores en R^2

Como se puede observar, los resultados obtenidos gráficamente por ambos métodos, en los ejercicios 1 y 2 que a continuación se presentan, son idénticos.

Ejercicio 1:

Determine el vector resultante **r**, en la operación de resta: **a – b**, por el método del polígono, según los valores indicados en la figura.

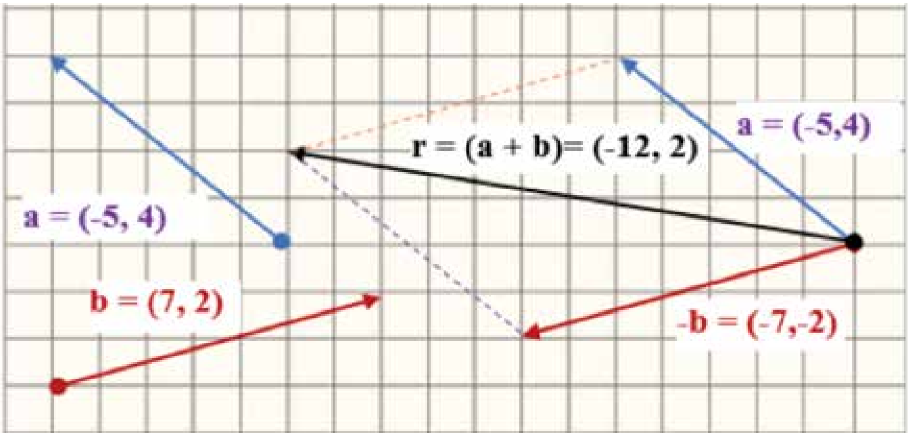
MÉTODO DEL POLÍGONO



Ejercicio 2:

Determine el vector resultante r, en la operación de resta: a – b, por el método del paralelogramo, según los valores indicados en la figura.

MÉTODO DEL PARALELOGRAMO



3.3.11. Producto de un vector por un número real (ℝ)[(3.3)] racional (ℚ)

En nuestro estudio solamente nos ocuparemos de operar con Números Racionales (ℚ): comprenden los *números enteros* (Z) y los *fraccionarios* (exactos y periódicos). Los números enteros agrupan el cero y los *números naturales* (N): el uno, los naturales primos y compuestos. [(71)].

(3.3) Números reales (R): incluye tanto a los números racionales (Q) (positivos, negativos y el cero) como a los números irracionales (que no pueden ser expresados como una fracción; su expresión decimal no es ni exacta ni periódica. También podemos denominar el número real como el conjunto de todos los números que corresponden a los puntos de la recta.

El resultado de multiplicar un número real "k" por un vector "**a**", expresado analíticamente según la expresión (3.14) es otro vector: "**r**", con las siguientes características:

$$\mathbf{r} = k \,.\, \mathbf{a} \tag{3.14}$$

Tiene la misma dirección que "**a**".

Su sentido coincide con el de "**a**", si "k" es un número positivo, y es el opuesto, si "k" es un número negativo.

El módulo es "k" veces la longitud que representa el módulo de "**a**" . (Si k es igual a 0 el resultado es el vector nulo).

El producto de un coeficiente cualquiera por un vector cumple las siguientes propiedades:

Conmutativa: $k \,.\, \mathbf{a} = \mathbf{a} \,.\, k$

Distributiva: $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (k \,.\, \mathbf{a}) + (k \,.\, \mathbf{b})$

Elemento neutro: $1 \,.\, \mathbf{a} = \mathbf{a}$

Elemento simétrico: $-1 \,.\, \mathbf{a} = -\mathbf{a}$

Veamos a continuación como se lleva a cabo esta interesante operación.

En la obtención del producto de un vector por un número real debemos multiplicar dicho número por cada una de las componentes ortogonales del vector.

Si por ejemplo queremos hallar el producto del coeficiente "k" por el vector "**a**", de componentes: $a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$, tendremos como resultado la ecuación. (3.15).

$$\mathbf{r} = k \,.\, \mathbf{a} = \mathbf{k}(a\mathbf{i} + a\mathbf{j}) = ka\mathbf{i} + ka\mathbf{j} \tag{3.15}$$

La representación gráfica del producto es igual a sumar el vector tantas veces como lo indica su coeficiente.

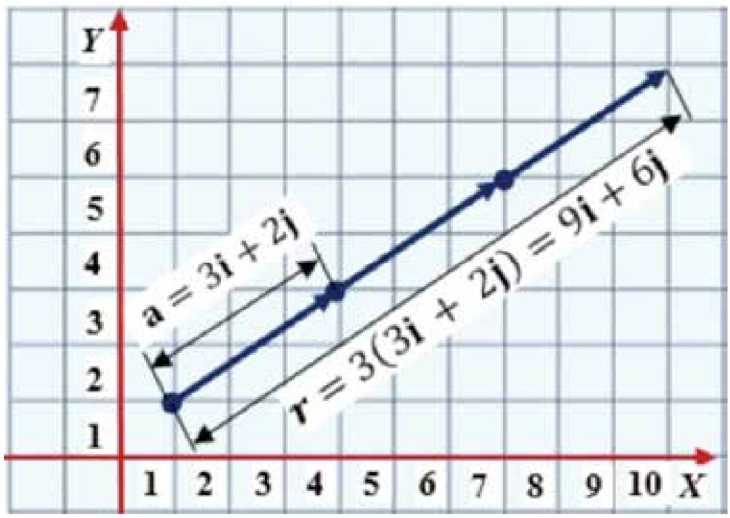
Ejemplo 1:

Halle el vector resultante (**r**) de la multiplicación del coeficiente $k = 3$ por el vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Represéntelo gráficamente. El vector a tiene su origen en el punto de coordenadas (1,1).

Solución analítica:

$\mathbf{r} = 3(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

Representación gráfica:



3.3.12. Producto escalar de dos vectores en R^3

3.3.12.1. Determinación del modelo matemático del producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores (producto punto) en R^3 tiene la misma operatoria que si tratara de vectores en R^2. Tomamos el caso de vectores en R^3 por ser el más general. El resultado siempre será un escalar. Estos casos son frecuentes en la fFísica y la ingeniería. Solo bastaría un solo ejemplo para ilustrar lo anterior. Cuando pretendemos hallar el trabajo de la resultante de un sistema de fuerzas por el desplazamiento (estamos tratando de dos vectores: vector fuerza y vector desplazamiento) el resultado es un escalar (el trabajo), un número cuya unidad está dada en joule (J).

El precepto fundamental que debemos tener en cuenta durante el desarrollo del producto escalar de dos vectores es operar miembro a miembro, tal y como lo hacíamos con las operaciones suma y resta. Veamos el desarrollo a continuación y el modelo matemático resultante.

Si partimos de dos vectores, como los representados a continuación y teniendo en cuenta lo anteriormente expresado, su producto escalar viene dado por la Ececuación. (3.16).

$$\boldsymbol{a} = (a\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{b} = (b\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} \,.\, \mathbf{b} = [(a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \,.\, (b\mathbf{i} + b\mathbf{j} + b\mathbf{k})]$$

$$= [(a\mathbf{i} \,.\, b\mathbf{i}) + (a\mathbf{j} \,.\, b\mathbf{j}) + (a\mathbf{k} \,.\, b\mathbf{k})] \tag{3.16}$$

Debemos tener presente que el producto escalar de los vectores unitarios puede ser uno o cero, según el caso [(72)], es decir:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

Ejercicio 1:

Hallar el producto escalar de los vectores tridimensionales:

$$\boldsymbol{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{z}$$

$$\boldsymbol{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{z}$$

Solución:

$$\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b} = 5\mathbf{i} \,.\, 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \,.\, 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \,.\, 6\mathbf{k}$$

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 20 + 9 + 12$

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 41$

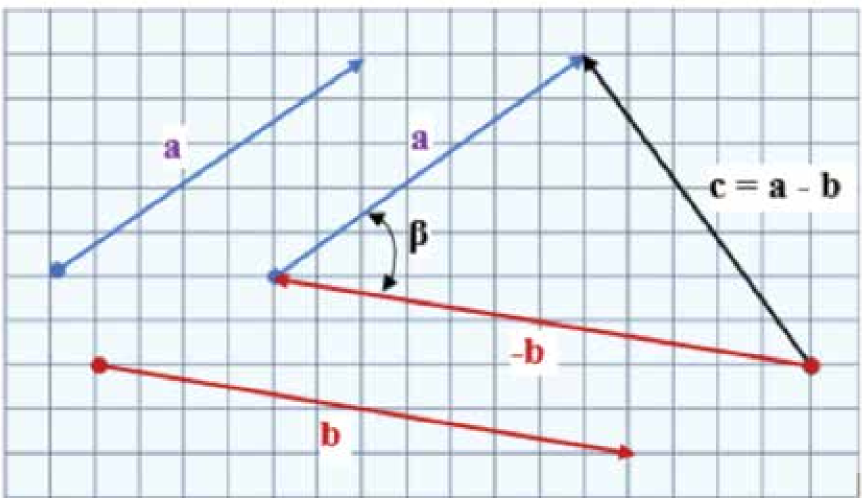
Para vectores expresados en forma polar (módulo de cada uno y ángulo entre ellos), el producto escalar de dos vectores se calcula multiplicando sus respectivos módulos por el coseno del ángulo que forman [(73)].

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\beta \qquad (3.17)$$

Veamos a continuación el desarrollo matemático para llegar a esta expresión [(72)]:

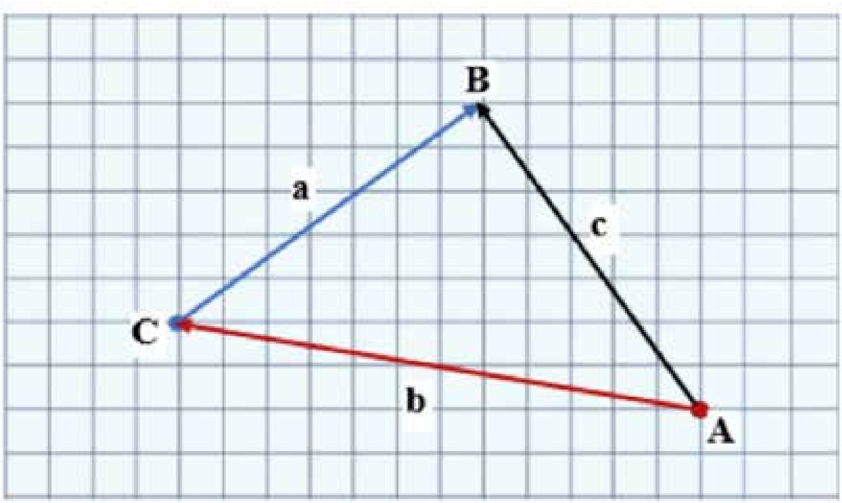
En el epígrafe 2.2.6 “Resolución de triángulos mediante el Teorema del seno y del coseno”, del Capítulo II: “Teorema de Pitágoras, elementos de trigonometría y física vectorial” tratamos sobre la determinación de los lados y ángulos de cualquier tipo de triángulo, especialmente los oblicuángulos (obtusángulos y acutángulos).

Fig. 3.22. Triángulo acutángulo



A través del *Teorema de los senos: ley de los senos* (que establece una proporción entre las longitudes de los lados de un triángulo y los senos de sus correspondientes ángulos opuestos): si en un triángulo *ABC*, las medidas de los lados opuestos a los ángulos *A*, *B* y *C* son respectivamente *a*, *b*, *c* (ver figura 3.23).

Fig. 3.23. Triángulo acutángulo ABC



Entonces, resultan las relaciones que se observan en la ecuación (3.18):

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C} \tag{3.18}$$

En este caso, figura. 3.22, hemos seleccionado un triángulo acutángulo, (formado producto de la operación resta: **a** – **b**, aplicando el método del polígono) llegamos a obtener un sistema de ecuaciones, como el representado en (2.14); de ahí hemos tomado la primera, podía ser una cualquiera, pues las demás representan el mismo concepto.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \,.\, b \,.\, cos\ C$

En la ecuación anterior, como los lados de un triángulo representan vectores, le damos valores modulares a estos, sustituimos el ángulo C por β y obtenemos una ecuación similar a la anterior (ver Ec.ecuación (2.19)).

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}| \,.\, \cos \beta \tag{3.19}$$

Comenzaremos por simplificar el lado izquierdo de la Ec.ecuación (3.18). Por la gráfica de la figura. 3.22, observamos que c=a-b . Elevamos al cuadrado ambos miembros (propiedad del producto escalar que establece que un vector multiplicado consigo mismo es igual al vector elevado al cuadrado):

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \,.\, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \tag{3.20}$$

O lo que es lo mismo:

$$|\mathbf{c}|^2 = \mathbf{a} \,.\, (\mathbf{a} - \mathbf{b}) - (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{b} \tag{3.21}$$

Efectuando, se obtiene:

$$|\mathbf{c}|^2 = \mathbf{a} \,.\, \mathbf{a} - \mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} - \mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} + \mathbf{b} \,.\, \mathbf{b} \tag{3.22}$$

Resolviendo las operaciones indicadas (dos productos escalares: que se igualan a su módulo al cuadrado, y la suma de términos semejantes).

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \tag{3.23}$$

Reelaboraremos nuevamente el miembro izquierdo de la Ec.ecuación (3.23), sustituyendo el valor $|\mathbf{c}|^2$ por el propio valor de la Ec.ecuación (3.23) e igualándolo al lado derecho de la Ec. ecuación (3.18),. se obtiene la ecuación Ec. (3.23).

$$|\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{ab} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}| \,.\, \cos \beta \tag{3.24}$$

Procedemos a despejar convenientemente la Ec.ecuación (3.24), de tal forma que solo quede en el lado izquierdo la expresión -2**ab**. Finalmente obtendremos la misma expresión matemática (3.17) que representa el producto escalar o producto punto.

$$-2\mathbf{a.b} = -|\mathbf{a}|2 + |\mathbf{b}|2 + |\mathbf{a}|2 - |\mathbf{b}|2 - 2|\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}| \,.\, \cos \beta$$

$$-2\mathbf{a.b} = -2|\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}| \,.\, \cos \beta$$

$$\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}| \,.\, \cos \beta$$

Si el triángulo resulta ser rectángulo (cuando los dos vectores son ortogonales, el ángulo formado es igual a 90º). Een este caso el producto escalar es cero, debido a que coseno 90º es igual a cero.

$$\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}| \,.\, \mathit{cos}\ 90^{o} = 0 \tag{3.25}$$

Puede darse la situación de que ambos vectores sean paralelos; en tal situación, el producto escalar de los vectores resulta de la multiplicación de los módulos de ambos vectores, ya que coseno de cero es igual a uno.

$$\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}| \,.\, \mathit{cos}\ 0^{o} = |\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}| \tag{3.26}$$

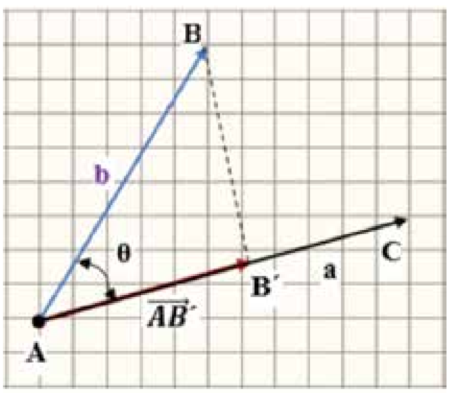
Si se tratara de dos vectores anti-paralelos (que tienen igual dirección pero sentido opuesto), el producto escalar es obtenidose obtiene de la multiplicación de los módulos de los dos vectores, pero con el signo cambiado.

$$\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}| \,.\, \mathit{cos}\ 180^{o} = -|\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}| \tag{3.27}$$

3.3.12.2. Interpretación geométrica del producto escalar de dos vectores en R^2

En la figura. 3.24, están representados los vectores **a** y **b**. Si proyectamos el vector **a** sobre **b**, se obtiene un nuevo vector ($\overrightarrow{\mathbf{AB}}$’), cuyo módulo coincide con el valor del segmento AB’.

Fig. 3.24. Representación gráfica del producto escalar de los vectores a y b



Sabemos que en el triángulo rectángulo ABB’ se cumple que:

$$\cos\,\theta = \frac{|\vec{\boldsymbol{AB}}\text{«}|}{|\mathbf{b}|}$$

Por lo tanto

$|\overrightarrow{\mathbf{AB'}}| = |\mathbf{b}| \, . \, \cos\,\theta.$

Entonces, gráficamente, podemos afirmar que: el valor del producto escalar de dos vectores no nulos en R^2 es igual al módulo de uno de ellos ($|\mathbf{a}|$) por la proyección ortogonal del otro sobre él ($|\mathbf{b}|. \cos\,\theta$). Lo cual es plenamente coincidente con su expresión analítica (3.17).

Conocidos los dos vectores, si fuéramos a hallar el valor absoluto de la proyección del vector b sobre **a**, operaríamos de la siguiente manera, partiendo de la ecuación (3.17):

$$\begin{aligned} |\mathbf{a.b}| &= |\mathbf{a}| \, . \, |\mathbf{b}| \, . \, \cos\,\theta \\ &= |\mathbf{a}| \, . \, |\textit{proyección de } \mathbf{b} \textit{ sobre } \mathbf{a}| \\ &= |\mathbf{a}| \, . \, |\mathbf{b}_{\mathbf{a}}| \end{aligned}$$

$$|\textit{proyección de } \boldsymbol{b} \textit{ sobre } \mathbf{a}| = |\mathbf{b_a}| = \frac{|\mathbf{b.a}|}{|\mathbf{a}|} \qquad (3.27)$$

3.3.12.3. Propiedades del producto escalar

Conmutativa: **a.b** = **b.a**

Homogénea: k(**a.b**) = (k.**b**).**a**

Distributiva: **a**.(**b** + **c**) = **a.b** + **a.c**

El producto escalar de un vector (no nulo) por sí mismo siempre es positivo:

a ≠ 0 ⇒ **a . a** > 0

3.3.13. Producto vectorial

En mecánica, una de las ramas de la física, gracias a un producto vectorial, es posible determinar el momento de fuerza en relación con un punto en el espacio y se puede definir como:

- producto vectorial de los vectores a y b llamaremos a un vector dado en un sistema de coordenadas rectangulares de espacio tridimensional tal que:
- si los vectores **a** y **b** son colineales, será cero;
- será perpendicular a los vectores **a** y **b**;
- su longitud está determinada por la fórmula: $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}| \cdot \mathit{sen} \angle (\mathbf{a},\mathbf{b})$;
- los tres vectores **a**, **b**, **c** tienen la misma orientación que el sistema de coordenadas dado;
- el producto vectorial de los vectores **a** y **b** tiene la siguiente designación: $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$.

Coordenadas vectoriales

Como cualquier vector tiene ciertas coordenadas en el sistema de coordenadas, puede darse una segunda definición de un producto vectorial, que permitirá encontrar sus coordenadas por las coordenadas dadas de los vectores.

En un sistema de coordenadas rectangulares de espacio tridimensional, el producto vectorial de dos vectores a = (ax; ay; az) y b = (bx; by; bz) se le llama al vector

$$\mathbf{c} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \mathbf{i} + (a_z \cdot b_y - a_x \cdot b_z) \cdot \mathbf{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \mathbf{k}$$

donde **i**, **j** y **k** son vectores de coordenadas.

3.3.14. Ejemplos de aplicación

A continuación, a manera de ilustración, desarrollaremos los siguientes ejemplos:

Ejercicio 1:

Calcular el valor absoluto de la proyección del vector **b** = (3,5) sobre el vector **a** = (-2,4)

Solución:

Partiendo de la ecuación (3.27), se sustituyen las variables vectoriales por los valores correspondientes:

$$|\mathbf{b_a}| = \frac{|(3,5)\,.\,(-2,4)|}{\sqrt{-2^2+4^2}}$$

$$= \frac{|(3.(-2)+5.4|}{\sqrt{12}} = \frac{|14|}{2\sqrt{3}}$$

Ejercicio 2:

Determinar el ángulo y el producto escalar de los siguientes vectores:

a = 2**i** + 3**j**

b = 4**i** + 5**j**

Solución:

El producto escalar podemos hallarlo multiplicando ambos vectores miembro a miembro; siempre teniendo en cuenta que: i.i=j.j=1

a.b = (2**i** + 3**j**) . (4**i** + 5**j**)

= 8 . $\mathbf{i}^2$ +15 . $\mathbf{j}^2$

= 23

El ángulo que describen ambos vectores podemos determinarlo a través del modelo matemático del producto escalar, Ec.ecuación (3.17), pero primero se hace necesario calcular los valores modulares de ambos vectores, lo cual haremos aplicando a través del teorema de Pitágoras:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathrm{a}_x^2 + \mathrm{a}_y^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{13}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{\mathrm{b}_{\mathrm{x}}^2 + \mathrm{b}_y^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{41}$$

$$\operatorname{arc}\cos\beta = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|}$$

$$= \frac{(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}).(4\mathbf{i} + 5\mathbf{j})}{\sqrt{13}.\sqrt{41}}$$

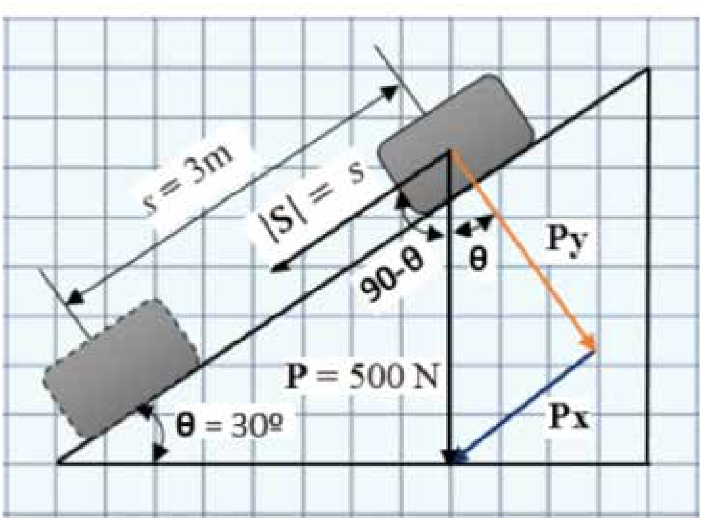
$$= \frac{8.\mathbf{i}^2 + \mathbf{15}.\mathbf{j}^2}{533}$$

$$= \frac{23}{533} = 0{,}0432$$

$$\beta = 87^{\underline{o}}\ 31'\ 27''$$

Ejercicio 3:

Una caja de m = 50 kg se desliza por acción de la fuerza de gravedad, sobre una superficie inclinada 30º respecto a la horizontal. Se desplaza una distancia s = 3 m. Hallar el trabajo realizado.



Solución:

Conocemos que el trabajo (magnitud escalar) viene dado por el producto de dos vectores: fuerza y desplazamiento; de ello resulta la Ec.ecuación (3.29). En este caso, el peso del cuerpo es una magnitud fFísica dependiente de la fuerza gravitacional;, por tanto, el peso del cuerpo es igual a 500 N (considerando la aceración de la gravedad igual a 10 m/s^2).

Este problema tiene dos vías de solución, que se resumen en la misma.

Considerando el modelo matemático del producto escalar correspondiente al tTrabajo: ecuaciónEc. (3.29)

$$W = \mathbf{P.\ s} = |\mathbf{P}|\ .\ |\mathbf{S}|\ \ cos\,\beta \qquad (3.29)$$

Asignamos al ángulo β el valor: (90º - θ)

$$W = |\mathbf{P}| \,.\, |\mathbf{S}| \cos(90^\circ - \theta) \quad (3.30)$$

Pero por todos es conocido que: $\cos(90^\circ - \theta) = sen\ \theta$

Entonces la ecuación (3.29) se transforma en la ecuación (3.30)

$$W = |\mathbf{P}| \,.\, |\mathbf{S}|\ sen\ \theta \quad (3.31)$$

Desde el punto de vista físico, el trabajo es realizado realmente por la fuerza que va en sentido del desplazamiento; en este caso, la fuerza: Px, la cual es paralela al desplazamiento. Si fuéramos a aplicar la ecuación (3.29), nos damos cuenta de que el valor del ángulo es cero; y por tanto el de la función coseno 0º = 1. Por lo que la expresión (3.32) es correcta y está en correspondencia con el precepto del producto escalar.

$$W = |\mathbf{S}| \,.\, |\mathbf{P}_x| \quad (3.32)$$

Pero $|\mathbf{P}_x| = |\mathbf{P}| \,.\, sen\ \theta$, sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.31) obtendremos la misma expresión (3.30)

$$W = |\mathbf{P}| \,.\, |\mathbf{S}|\ sen\ \theta$$

Sustituyendo los valores dados en la ecuación anterior obtendremos:

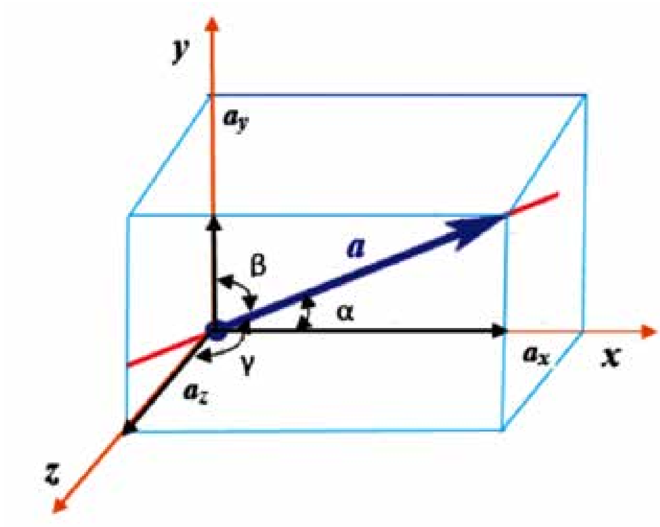
$$W = 500\ \mathrm{N} \,.\, sen\ 30^\circ \,.\, 50\ \mathrm{m}$$

$$= (500\mathrm{N}) \,.\, (0{,}5) \,.\, (50\ \mathrm{m})$$

$$= 12\ 500\ \mathrm{J}$$

Ejercicio 4:

Dado el módulo del vector |**a**|=10 y los ángulos que este vector forma con los ejes de coordenadas α = 45º, β = 60º, γ = 120º.



Encuentre la proyección del vector **a** sobre los ejes de coordenadas.

Las proyecciones buscadas a_x, a_y y a_z se encuentra por la fórmula (3.17)

$$a_x = |\boldsymbol{a}|cos\ \alpha = 10cos\ 45^0 = 10\frac{\sqrt{2}}{2} = 7{,}071$$

$$= |\boldsymbol{a}|cos\ \beta = 10cos\ 60^0 = \frac{10}{2} = 5$$

$$= |\boldsymbol{a}|cos\ \gamma = 10cos\ 120^0 = -\frac{10}{2} = -5$$

Ejercicio 5:

A partir de los vectores a, b y c, realizar las siguientes operaciones:

a) **a** + **b**

b) **a** - **b**

c) -**a** - **b**

d) **a** + **b** + **c**

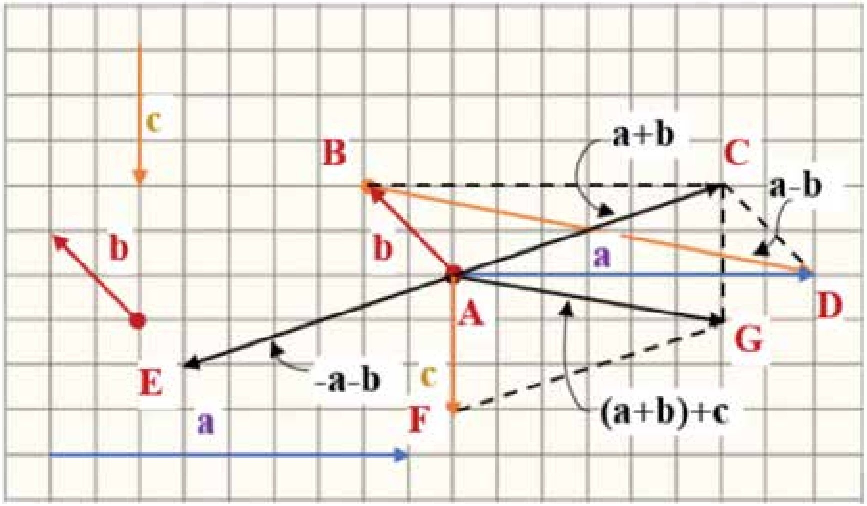
Solución:

a) En un punto arbitrario del plano, posesionamos el punto A, el cual tomaremos como origen. A continuación, colocamos los vectores a y b: los cuales tendrán sus extremos en los puntos B y D respectivamente. Entonces trazamos líneas paralelas a partir de los extremos de los citados vectores, mismas que se intersectan en el punto C, de tal forma que queda formado el paralelogramo ABCD. El punto C define el extremo del vector resultante $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

b) El vector diferencia a - b, es decir, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, se construye a partir de la segunda diagonal de este paralelogramo con dirección desde el final del vector **b** (punto B) hasta el final del vector a (punto D).

c) La resta se resume como una suma con signo cambiado, de tal propiedad se obtiene el vector –a –b; el cual resulta ser un vector colineal al vector a + b, con punto de aplicación en A, pero con signo cambiado: $-\mathbf{a} - \mathbf{b} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$. Finalmente se obtiene el siguiente resultado: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CA}$

d) El vector suma (**a** + **b** + **c**) se construye muy fácilmente a partir del vector (a + b), antes obtenido, adicionándole el vector (–c), teniendo en cuenta la propiedad de operaciones lineales: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \overrightarrow{AC} + c$. colocamos el vector (c) a partir del punto A y formamos el segundo polígono ACFG, obteniéndose y se obtiene el vector final $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \overrightarrow{AG}$.



Ejercicio 6:

Diga si, en las siguientes operaciones, se obtiene un vector o un escalar (γ es un número real). Los paréntesis jerarquizan la secuencia lógica de las operaciones del álgebra elemental.

a) **a** . (**b** . **c**);

b) (**a** . **b**) . **c**;

c) **a** . (**b** x (**c** . γ))

d) n . ((**a** x **b**) . c). d

e) ((**a** x **b**) . **a**).

Solución:

De las definiciones anteriores se deduce que:

a) En este primer caso, se nos presenta la multiplicación de un vector a por un producto punto (**b** . **c**); de lo cual resulta la multiplicación del vector a por un escalar (k); dando lugar a un nuevo vector; al cual notaremos como v_1.

$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = k_1$

$k_1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{v_1}$

b) Este segundo caso es idéntico al anterior, pues se cumple la propiedad conmutativa del producto de vectores. Se trata de la multiplicación de un número real: el producto escalar (**a** . **b**) por el vector c; de lo cual resulta el vector v_2

$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = k_2$

$k_2 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{v_2}$

c) El tercer caso es interesante, se trata de un producto mixto de tres vectores; es decir, aquí se da la multiplicación del número real γ por el vector c, resultando un nuevo vector v_3; posteriormente, con el vector resultante v_3 se realiza un producto cruz, dando lugar a un nuevo vector: v_4, perpendicular a los vectores anteriores. Finalmente se obtiene un número real k_3, a través del producto escalar: $\mathbf{a.v_4}$

$\mathbf{c} \cdot \gamma = \mathbf{v_3}$

$\mathbf{v_3} \text{ x } \mathbf{b} = \mathbf{v_4}$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = k_3$

d) Este otro caso resulta no menos interesante. Primero se presenta un producto cruz, dando lugar al vector v_5, perpendicular a los vectores a y b, este nuevo vector, al realizar un producto punto con el vector a, da lugar al escalar k_4. Finalmente queda la simple multiplicación de dos números reales: n y k_4 por el vector d, de todo lo cual resulta un nuevo vector $\mathbf{v_5}$.

$\mathbf{a} \text{ x } \mathbf{b} = \mathbf{v_5}$

$\mathbf{v_5} \cdot \mathbf{c} = k_4$

$n \cdot k_4 \cdot \mathbf{d} = \mathbf{v_5}$

e) Este último caso que presentamos es muy interesante, ya que esta secuencia de productos ((**a** x **b**). **a**) = 0, debido a la ortogonalidad de los vectores. Una de las propiedades del producto cruz dice que si un vector, resultante de un producto cruz, se multiplica escalarmente por otro vector ciertamente debiera dar un escalar, pero no es así, sino que el resultado es igual a cero, ya que el vector obtenido por el producto cruz es ortogonal a cualquiera de los dos vectores del producto anterior.

Ejercicio 7:

Encuentre la longitud del producto vectorial de los vectores a y b, si se conoce que $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 5$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi/4$.

Solución:

Mediante la determinación de la longitud del producto vectorial de los vectores a y b se resuelve el ejercicio

$$|[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| \,.\, |\mathbf{b}| \, sen\, \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 3 \cdot 5 \, sen\, (\pi/4) = 15\sqrt{22}.$$

Ejercicio 8:

Se especifican dos vectores en un sistema de coordenadas rectangular

$\mathbf{a} = (2, 1, -3)$, $\mathbf{b} = (0, -1, 1)$. Encontrar su producto vectorial.

Solución:

Según la segunda definición, encontramos el producto vectorial de dos vectores en las coordenadas dadas:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]=(a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \mathbf{i} + (a_z \cdot b_y - a_x \cdot b_z) \cdot \boldsymbol{j} +(\mathrm{a}_\mathrm{x} \cdot \mathrm{b}_\mathrm{y} - \mathrm{a}_\mathrm{y} \cdot \mathrm{b}_\mathrm{x}) \cdot \boldsymbol{k} = (1 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1)) \cdot \boldsymbol{i} + ((-3) \cdot 0 - 2 \cdot 1) \cdot \boldsymbol{j} + (2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0) \cdot \boldsymbol{k} == -2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] Y. Answar. (2015, ene). "World's oldest butchering tools gave evolutionary edge to human communication". The Archaeology News Network. [en línea]. Disponible en: https://archaeologynewsnetwork.blogspot.com/2015/01/worlds-oldest-butchering-tools-gave.html

[2] (2010, feb. 8). Neue Trend-Diät – Essen wie die Steinzeitmenschen - Wissen - Berliner Morgenpost [en línea]. Disponible en: https://www.morgenpost.de/web-wissen/article104928515/Neue-Trend-Diaet-Essen-wie-die-Steinzeitmenschen.html

[3] (2018). Cómo ha sido la evolución de la alimentación humana [en línea]. Disponible en: https://www.curiosfera.com/evolucion-de-la-alimentacion-humana/

[4] (2018). "Prometeo". Wiki Mitología Griega. [en línea]. Disponible en: http://es.mitologiagriega.wikia.com/wiki/Prometeo

[5] (2014, ene. 23). "Molinos de Consuegra, una bella estampa manchega ". El Discreto Encanto de Viajar [en línea]. Disponible en: https://www.eldiscretoencantodeviajar.com/molinos-de-consuegra-quijote-castilla/

[6] (2014, 23 de junio). Cómo es la actividad minera y energética de Holanda, rival de Argentina. Qué es la enfermedad holandesa. MiningPress. Disponible en: http://www.miningpress.com/nota/260278/como-es-la-actividad-minera-y-energetica-de-holanda-rival-de-argentina-que-es-la-enfermedad-holandesa

[7] M. C. Garden (2017, feb, 16). Ocho preguntas para descifrar el Canal de Navarra. Diario de Navarra [en líena]. Disponible en: https://www.diariodenavarra.es/noticias/navarra/2017/02/15/ocho_preguntas_para_descifrar_canal_navarra_517151_300.html

[8] (2018). Machu Picchu. Viajes National Geographic [en línea]. Disponible en: https://www.nationalgeographic.com.es/destinos/machu-picchu

[9] (2018). Ingeniería sorprendente del agua en Machu Picchu. Perú Turismo [en línea]. Disponible en: https://www.peru-turismo.com/BlogPeru/?q=node/12

[10](2018). Ingenieros incas e ingeniería hidráulica [en línea]. Disponible en: https://www.arqhys.com/articulos/ingenieros-incas-hidraulica.html

[11]. (2018). Las cinco centrales hidroeléctricas más grandes del mundo. Blog Ingeniería. Disponible en: http://blogingenieria.com/ingenieria-civil/5-centrales-hidroelectricas-mas-grandes/

[12]J. López Pujol, M. Ponceti. "El proyecto de las Tres Gargantas de China: su historia y sus consecuencias". Estudios de Asia y África, vol. 43, núm. 2, pp. 255-324, may-jun 2008.

[13]O. Silva (2018). "Maravilla de ingeniería: Presa Hidroeléctrica de Itaipú". Comunidad 360 [en línea]. Disponible en: http://mniapsccp01.azurewebsites.net/comunidad360/blog/detalle/maravilla-de-ingenieria-presa-hidroelectrica-itaipu

[14]Jon (2018). "Presa de Tucuruí". WMegaconstrucciones. [en línea]. Disponible en: http://megaconstrucciones.net/?construccion=presa-tucurui

[15]Equipo de redacción profesional (2012, dic). "Presa Grand Coulee". Arqhys.com [en línea]. Disponible en: https://www.arqhys.com/construccion/presa-grandcoulee.html

[16] (2018). "Física/Unidades y medidas". Wikilibros. [en línea]. Disponible en: https://es.wikibooks.org/wiki/F%C3%ADsica/Unidades_y_medidas

[17](2018). "Historia de la medición". EcuRed [en línea]. Disponible en: https://www.ecured.cu/Historia_de_la_medici%C3%B3n

[18]I. Castelazo Sinencio. (2020). "Incertidumbre en las Mediciones. Impactos Económicos y Sociales". Disponible en: http://www.cenam.mx/Memorias/descarga/simposio%202002/doctos/sp001.pdf

[19](2018). "Definición de magnitud". Definición.com.mx [en línea]. Disponible en: https://www.definicion.com/

[20](2018). “Concepto de magnitud”. Definición en DeConceptos.com [en línea]. Disponible en: https://deconceptos.com/ciencias-naturales/magnitud

[21](2018). “Magnitud”. Definición y etimología [Internet]. Disponible en: https://definiciona.com/magnitud/#etimologia

[22](2018). “Definiciones de magnitud, medir y unidad de medida”. Física [en línea]. Disponible en: http://www.fisicacbtis162.com/in-the-news/2-1---definiciones-de-magnitud-medir-y-unidad-de-medida

[23](2018). “Las ciencias físicas y la medida: Magnitudes y medida - 1a parte”. Natureduca [en línea]. Disponible en: https://natureduca.com/fisica-ciencias-fisicas-y-medida-magnitudes-01.php

[24]Oficina Internacional de Pesas y Medidas (2008). El Sistema Internacional de Unidades: SI. París: Centro Español Metrología.

[25]H. Young y R. Freedman (2009). Física Universitaria Volumen 1 y 2 (12.a ed.). Ciudad de México: El Oso Panda.

[26](2018). “Física/Texto completo”. Wikilibros [en línea]. Disponible en: https://es.wikibooks.org/wiki/F%C3%ADsica/Texto_completo

[27]C. Mosquera (s.f.). Magnitudes escalares y vectoriales. Ciudad: Editorial.

[28]A. Denis (año). “Vectores en R2 y R3”. UNSAM [en línea]. Disponible en: http://www.unsam.edu.ar/escuelas/ciencia/alumnos/matematica_guia/apunte-3%C2%B0%20parte.pdf

[29]Tema 1. Vectores. En. Disponible en: https://cursos.aiu.edu/Matematicas%20Superiores/PDF/Tema%201.pdf

[30]Hn A. Young Freedman - Física Universitaria - Vol 1 PDF. [citado 5 de agosto de 2018]; Disponible en: http://www.academia.edu/4703070/Young_Freedman_-_Fisica_Universitaria_-_Vol_1_PDF

[31] (2018). “Medición”. Wikipedia [en línea]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Medici%C3%B3n&oldid=109846582

[32] (2018). “Definición de medición”. Definición [en línea]. Disponible en: https://definicion.de/medicion/

[33](2018). “Magnitud física”. Wikipedia [en línea]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Magnitud_f%C3%ADsica&oldid=108597487

[34] (2018). “Escalar (física)”. Wikipedia [en línea]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Escalar_(f%C3%ADsica)&oldid=106946885

[35] (2018). “Magnitud adimensional”. Web [en línea]. Disponible en: http://www.esacademic.com/dic.nsf/eswiki/37927

[36]R. Resnick, D. Halliday y K. Krane. (2014). Física Vol 1 (5.a ed.). Ciudad: Editorial.

[37]Física Clásica [Internet]. Scribd. [citado 5 de agosto de 2018]. Disponible en: https://es.scribd.com/document/75509511/Fisica-Clasica

[38]Incertidumbre, Exactitud y Precisión en las mediciones. | [Internet]. [citado 11 de agosto de 2018]. Disponible en: http://www.medicionesmeyca.com/?page_id=79

[39]Sistemas De Unidades - Documentos de Investigación [Internet]. [citado 5 de agosto de 2018]. Disponible en: https://www.clubensayos.com/Ciencia/Sistemas-De-Unidades/70597.html

[40]Sistema Internacional de Unidades (SI) - EniG. Tabla periódica de los elementos [Internet]. [citado 5 de agosto de 2018]. Disponible en: https://www.periodni.com/es/sistema_internacional_de_unidades.html

[41]Système International d’Unités SI. Sistema Internacional de Unidades (SI) - EniG. Tabla periódica de los elementos [Internet]. [citado 5 de agosto de 2018]. Disponible en: https://www.periodni.com/es/sistema_internacional_de_unidades.html

[42]Símbolos, Unidades y Dimensiones. Ampliación de Física [Internet]. Disponible en: http://www.laser.uvigo.es/Docencia/Industriales/AF.08/pdf/unidades0506.pdf

[43]Nicolas Torres Brauer. Prefijos del Sistema Internacional [Internet]. Educación presentado en; 02:19:07 UTC [citado 5 de agosto de 2018]. Disponible en: https://es.slideshare.net/Klothar/prefijos-del-sistema-internacional-43626989

[44] Instrumentación Electrónica: Sistema internacional de medidas-SI [Internet]. Instrumentación Electrónica. [citado 5 de agosto de 2018]. Disponible en: http://inselectronica.blogspot.com/p/s_29.html

[45] Serway Vuille Chris FJS. Fundamentos de la Física. 8va. Cengage Learning.; 2010.

[46] Instrumentos de medición [Internet]. djpfisica. 2013 [citado 5 de agosto de 2018]. Disponible en: https://djpfisica.wordpress.com/19-2/tercer-periodo/la-medida-y-la-medicion/clases-de-medicion/instrumentos-de-medicion/

[47] Cintas Métricas | flexómetro | huincha de medir [Internet]. De Máquinas y Herramientas. [citado 26 de septiembre de 2018]. Disponible en: http://www.demaquinasyherramientas.com/herramientas-manuales/cintas-metricas-flexometro-huincha

[48] Muñoz HG. Incertidumbre en la Calibración de Calibradores Tipo Vernier. 2001;13.

[49] Física/Estructura de la materia/Termómetros - Wikilibros [Internet]. [citado 6 de agosto de 2018]. Disponible en: https://es.wikibooks.org/wiki/F%C3%ADsica/Estructura_de_la_materia/Term%C3%B3metros

[50] Pirómetro. En: Wikipedia, la enciclopedia libre [Internet]. 2018 [citado 6 de agosto de 2018]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Pir%C3%B3metro&oldid=107242979

[51] Pirómetro - EcuRed [Internet]. [citado 6 de agosto de 2018]. Disponible en: https://www.ecured.cu/Pir%C3%B3metro

[52] Termómetro de lámina bimetálica, Regwell Control. Bimetallic Strip Thermometer. - Colección de Instrumentos Científicos: G. Crovetto. [Internet]. [citado 6 de agosto de 2018]. Disponible en: https://sites.google.com/site/coleccionguillermocrovetto/home/instrumentos-diversos/termmetro-regwell

[53] Uc P. Instrumentos de Medidas de Longitud, Tiempo y Masa: Instrumentos de Medición [Internet]. Instrumentos de Medidas de Longitud, Tiempo y Masa. 2008 [citado 6 de agosto de 2018]. Disponible en: http://laboratoriobae.blogspot.com/2008/03/instrumentos-de-medicion.html

[54] Definición de trigonometría - Qué es, Significado y Concepto [Internet]. [citado 17 de agosto de 2018]. Disponible en: https://definicion.de/trigonometria/

[55] Funciones Trigonométricas [Internet]. [citado 12 de agosto de 2018]. Disponible en: http://www.mty.itesm.mx/dtie/deptos/m/ma00-841-1/Funciones-Trigonometricas.htm

[56] Función trigonométrica. En: Wikipedia, la enciclopedia libre [Internet]. 2018 [citado 17 de agosto de 2018]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Funci%C3%B3n_trigonom%C3%A9trica&oldid=109212026

[57] Pascual Juan Jesús. Ejercicios Resueltos de Trigonometría [Internet]. Timonmate; Disponible en: https://matematicasjjp.webcindario.com/trigonometria_ejercicios_resueltos.pdf

[58] La trigonometría es una rama de la matemática [Internet]. Scribd. [citado 18 de agosto de 2018]. Disponible en: https://es.scribd.com/document/60169388/La-trigonometria-es-una-rama-de-la-matematica

[59] Ramírez Juárez Oliverio. Ley de Senos y Coasenos [Internet]. uveg: Universidad Virtual Estado Guanajuato; 2012. Disponible en: http://roa.uveg.edu.mx/repositorio/licenciatura2015/252/LECTURA2Leydesenosycosenos.pdf

[60] Teorema del seno y coseno. Ejercicios resueltos. – Química y algo más [Internet]. [citado 19 de agosto de 2018]. Disponible en: https://quimicayalgomas.com/matematica/teorema-del-seno-y-coseno-ejercicios-resueltos/

[61] Teoremas del seno y coseno - Vitutor [Internet]. [citado 19 de agosto de 2018]. Disponible en: https://www.vitutor.com/al/trigo/trigo_2.html

[62] Triángulos oblicuángulos [Internet]. [citado 22 de agosto de 2018]. Disponible en: https://www.aritor.com/trigonometria/triangulos_oblicuangulos.html

[63] Definición de ciencias exactas — Definición de [Internet]. Definición.de. [citado 26 de agosto de 2018]. Disponible en: https://definicion.de/ciencias-exactas/

[64] Ciencias exactas - EcuRed [Internet]. [citado 27 de agosto de 2018]. Disponible en: http://www.ecured.cu/index.php/Ciencias_exactas#Fuente

[65] 10 Ejemplos de Ciencias Exactas [Internet]. [citado 27 de agosto de 2018]. Disponible en: https://www.ejemplos.co/10-ejemplos-de-ciencias-exactas/

[66]Ciencias aplicadas. En: Wikipedia, la enciclopedia libre [Internet]. 2018 [citado 27 de agosto de 2018]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Ciencias_aplicadas&oldid=109906450

[67]Sears, Zemansky, Young & Freedman. Física Universitaria. 12.a ed. Vol. Vol. 1. Dpto Ciencias Básicas. Universidad Autónoma Metropolitana, México: Pearson Educación; 763 p.

[68]Giancoli Douglas C. Física I para Ciencias e Ingeniería. Vol. I. Dpto. de Física. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores. Monterrey. México: Pearson Educación; 632 p.

[69]Yuri Milachay. Vectores. Álgebra vectorial [Internet]. Educación presentado en; 22:06:40 UTC [citado 31 de agosto de 2018]. Disponible en: https://es.slideshare.net/kurtmilach/vectores-lgebra-vectorial

[70]Suma de Vectores. Método Analítico [Internet]. [citado 31 de agosto de 2018]. Disponible en: http://jfinternational.com/mf/suma-vectores-fisica.html

[71]Robles F. Clasificación de los Números Reales [Internet]. Lifeder. 2017 [citado 2 de septiembre de 2018]. Disponible en: https://www.lifeder.com/clasificacion-numeros-reales/

[72]Gómez LA. Producto escalar de dos vectores - Matemática y Física [Internet]. Producto escalar de dos vectores - Matemática y Física. 2015 [citado 2 de septiembre de 2018]. Disponible en: https://movimientomath.blogspot.com/2015/07/producto-escalar-de-dos-vectores.html

[73]Producto escalar - FisicaPractica.Com [Internet]. [citado 1 de septiembre de 2018]. Disponible en: https://www.fisicapractica.com/producto-escalar.php

[74] Mancheno Flores, L. (2002). *Diseño y Modelaje en Artículos de Piel. texto Básico*. Centro de Reproducción Digital ESPOCH.

[75] El Períodico de la Energía. (2017). Alemania, Dinamarca y Holanda crean el 'Silicon Valley' de la eolica marina en el Mar del Norte. disponible: https://elperiodicodelaenergia.com/alemania-dinamarca-y-holanda-crean-el-sillicon-valley-de-la-eolica-marina-en-el-mar-del-norte/

76] Navarro O., M & Navarro S. M. (). ¿Cuáles son los cuatro momentos esenciales a tener en cuenta en toda investigación científica? *Revista CTA*. Volumen

18, número 4, páginas 79-81 del año 2009. Formato papel: ISSN-1010-2760, versión electrónica: ISSN-2071-0054. Disponible en: https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=%C2%BFCu%C3%A1les+son+los+cuatro+momentos+esenciales+a+tener+en+cuenta+en+toda+investigaci%C3%B3n+cient%C3%ADfica%3F+

[77] Ruiza, M., Fernández, T. y Tamaro, E. (2004). Biografia de William Thomson [Lord Kelvin]. En *Biografías y Vidas. La enciclopedia biográfica en línea*. Barcelona (España). Recuperado de https://www.biografiasyvidas.com/

ANEXO I
UNIDADES BÁSICAS O FUNDAMENTALES DEL SISTEMA INTERNACIONAL DE MEDIDAS: SI

Magnitud física básica (símbolo)	Unidad básica (símbolo)	Definición actual	Propuesta de revisión
Longitud (l, h, r, x)	metro (m)	Longitud del trayecto recorrido por la luz en el vacío en un intervalo de tiempo de 1/299 792 458 segundos. *De aquí resulta que la velocidad de la luz en el vacío es exactamente 299 792 458 m/s.*	
Masa (M)	kilogramo (kg)	Masa del prototipo internacional del kilogramo, adoptado por la Conferencia General de Pesas y Medidas y depositado en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, en Sèvres, Francia. *Este prototipo es un cilindro de 39 mm de altura y 39 mm de diámetro de una aleación 90 % de platino y 10 % de iridio; tiene una densidad de 21 500 kg/m^3.*	Propuesta de redefinición a un valor relacionado con la constante de Planck (*h*).

Tiempo (t)	segundo (s)	Duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133. *De aquí resulta que la frecuencia de la transición hiperfina del estado fundamental del átomo de cesio 133 es exactamente 9 192 631 770 Hz.*	
Corriente eléctrica (I)	amperio (A)	Intensidad de una corriente constante que, mantenida en dos conductores paralelos rectilíneos de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de un metro uno del otro, en el vacío, produciría entre estos conductores una fuerza igual a 2×10^{-7} newton por metro de longitud. *De aquí resulta que la constante magnética, también conocida con el nombre de permeabilidad del vacío, es exactamente* $4\pi \times 10^{-7}$ *H/m.*	Propuesta de redefinición a un valor relacionado con la carga eléctrica (*e*).***
Temperatura termodinámica (T)	kelvin (K)	Fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua. De aquí resulta que la temperatura termodinámica del punto triple del agua es exactamente 273.16 K (0.01 °C).[4]	Propuesta de redefinición a un valor relacionado con la constante de Boltzmann (*k*)

Cantidad de sustancia (n)	mol (mol)	Cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0.012 kilogramos de carbono 12. Cuando se emplea el mol, las entidades elementales deben especificarse y pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras partículas o agrupaciones específicas de tales partículas. *De aquí resulta que la masa molar del carbono 12 es exactamente 12 g/mol.*	Propuesta de redefinición a un valor relacionado con la constante de Avogadro (N_A)
Intensidad luminosa (l_v)	candela (cd)	Intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} hercios y cuya intensidad energética en esa dirección es 1/683 vatios por estereorradián. De aquí resulta que la eficacia luminosa espectral de una radiación monocromática de frecuencia igual a 540×10^{12} Hz es exactamente 683 lm/W	

ANEXO II
UNIDAD SI DE MASA: KILOGRAMO (kg)

Masa del prototipo internacional de kilogramo que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Sévres (París).

Es la única de las unidades SI que aún se define en función de un patrón, en lugar de en relación con magnitudes físicas fundamentales. La definición original era la masa de un litro de agua pura a 4 °C y presión atmosférica estándar.

Fig. 1. Prototipo internacional (platino-iridio)

Fuente: Sistema Internacional de Unidades.
http://www.esi2.us.es/DFA/FFII/CursoCero/Curso0809/Curso0_DyU_BN_0809.pdf

ANEXO III
UNIDADES FÍSICAS DERIVADAS

Magnitud Física	Nombre de la Unidad	Símbolo de la Unidad	Expresada en unidades derivadas	Expresada en unidades básicas
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	m/s^2		$m·s^{-2}$
Actividad catalítica	Katal	kat		$mol·s^{-1}$
Actividad radiactiva	Becquerel	Bq		s^{-1}
Ángulo plano	Radián	rad		$m·m^{-1}$
Ángulo sólido	Estereorradián	sr		$m^2·m^{-2}$
Área	Metro cuadrado	m^2	m^2	m^2
Capacitancia eléctrica	Faradio	F	$C·V^{-1}$	$m^{-2}·kg^{-1}·s^4·A^2$
Carga eléctrica	Culombio	C		$A·s$
Concentración	mol por metro cúbico			$mol·m^{-3}$
Conductancia eléctrica	Siemens	S	$A·V^{-1}$	$m^{-2}·kg^{-1}·s^3·A^2$
Conductividad térmica	Vatio por metro kelvin		$W·m^{-1}·K^{-1}$	$m·kg·s^{-3}·K^{-1}$
Densidad	Kilogramo por metro cúbico			$kg·m^{-3}$
Densidad de energía	Julio por metro cúbico		$J·m^{-3}$	$m^{-1}·kg·s^{-2}$
Densidad de flujo magnético, inducción magnética, polarización magnética	Tesla	T	$V·s·m^{-2}$	$kg·s^{-2}·A^{-1}$

Dosis de radiación absorbida	Gray	Gy	$J \cdot kg^{-1}$	$m^2 \cdot s^{-2}$
Dosis equivalente	Sievert	Sv	$J \cdot kg^{-1}$	$m^2 \cdot s^{-2}$
Energía específica	Julio por kilogramo		$J \cdot kg^{-1}$	$m^2 \cdot s^{-2}$
Energía molar	Julio por mol		$J \cdot mol^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1}$
Energía, trabajo, calor	Julio	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Exposición (rayos X y gamma)			$C \cdot kg^{-1}$	$kg^{-1} \cdot s \cdot A$
Flujo luminoso	Lumen	lm	$cd \cdot sr$	
Flujo magnético	Weber	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Flujo volumétrico o Caudal	Metro cúbico por segundo			$m^3 \cdot s^{-1}$
Frecuencia	Hercio	Hz		s^{-1}
Fuerza	Newton	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Inductancia	Henrio	H	$V \cdot A^{-1} \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Intensidad de campo eléctrico			$V \cdot m^{-1}$	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Intensidad de campo magnético				$A \cdot m^{-1}$
Irradiancia, Densidad de flujo de calor	Vatio por metro cuadrado		$W \cdot m^{-2}$	$kg \cdot s^{-3}$
Luminancia				$cd \cdot m^{-2}$
Luminosidad	Lux	lx	$lm \cdot m^{-2}$	$cd \cdot sr \cdot m^{-2}$
Momento de fuerza	Newton metro		$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Permeabilidad			$H \cdot m^{-1}$	$m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Potencia	Vatio	W	$J \cdot s^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Potencial eléctrico, voltaje inducido	Voltio	V	$J \cdot C^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Presión	Pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$

Resistencia eléctrica	Ohmio	Ω	$V \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Tasa de dosis absorbida			$Gy \cdot s^{-1}$	$m^2 \cdot s^{-3}$
Tensión superficial	Julio por metro cuadrado		$N \cdot m^{-1} = J \cdot m^{-2}$	$kg \cdot s^{-2}$
Velocidad angular	Radián por segundo	rad/s	$rad \cdot s^{-1}$	s^{-1}
Velocidad, rapidez	Metro por segundo	m/s	$m \cdot s^{-1}$	$m \cdot s^{-1}$
Viscosidad cinemática, coeficiente de difusión				$m^2 \cdot s^{-1}$
Viscosidad dinámica	Pascal segundo		$N \cdot s \cdot m^{-2} = Pa \cdot s$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}$
Volumen	Metro cúbico	m^3	m^3	m^3
Volumen específico	Metro cúbico por kilogramo			$m^3 \cdot kg^{-1}$
Volumen molar	metro cúbico por mol			$m^3 \cdot mol^{-1}$

ANEXO IV
PREFIJOS DEL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

1000^n	10^n	Prefijo	Símbolo	Escala corta [n 1]	Escala larga [n 1]	Equivalencia decimal en los Prefijos del Sistema Internacional	Asignación
1000^8	10^{24}	yotta	Y	Septillón	Cuatrillón	1 000 000 000 000 000 000 000 000	1991
1000^7	10^{21}	zetta	Z	Sextillón	Mil trillones	1 000 000 000 000 000 000 000	1991
1000^6	10^{18}	exa	E	Quintillón	Trillón	1 000 000 000 000 000 000	1975
1000^5	10^{15}	peta	P	Cuatrillón	Mil billones	1 000 000 000 000 000	1975
1000^4	10^{12}	tera	T	Trillón	Billón	1 000 000 000 000	1960
1000^3	10^9	giga	G	Billón	Mil millones / Millardo	1 000 000 000	1960
1000^2	10^6	mega	M	Millón		1 000 000	1960
1000^1	10^3	kilo	k	Mil / Millar		1 000	1795
$1000^{2/3}$	10^2	hecto	h	Cien / Centena		100	1795
$1000^{1/3}$	10^1	deca	da	Diez / Decena		10	1795
1000^0	10^0	*Sin prefijo*		Uno / Unidad		1	
$1000^{-1/3}$	10^{-1}	deci	d	Décimo		0.1	1795
$1000^{-2/3}$	10^{-2}	centi	c	Centésimo		0.01	1795
1000^{-1}	10^{-3}	mili	m	Milésimo		0.001	1795
1000^{-2}	10^{-6}	micro	μ	Millonésimo		0.000 001	1960
1000^{-3}	10^{-9}	nano	n	Billonésimo	Milmillonésimo	0.000 000 001	1960
1000^{-4}	10^{-12}	pico	p	Trillonésimo	Billonésimo	0.000 000 000 001	1960
1000^{-5}	10^{-15}	femto	f	Cuatrillonésimo	Milbillonésimo	0.000 000 000 000 001	1964
1000^{-6}	10^{-18}	atto	a	Quintillonésimo	Trillonésimo	0.000 000 000 000 000 001	1964
1000^{-7}	10^{-21}	zepto	z	Sextillonésimo	Miltrillonésimo	0.000 000 000 000 000 000 001	1991
1000^{-8}	10^{-24}	yocto	y	Septillonésimo	Cuatrillonésimo	0.000 000 000 000 000 000 000 001	1991

ANEXO V
TABLAS DE CONVERSIONES DE UNIDADES

LONGITUD

	cm	metro	km	in	ft	mi
1 centímetro	1	10^{-2}	10^{-5}	0.3937	3.281×10^{-2}	6.214×10^{-6}
1 metro	100	1	10^{-3}	39.37	3.281	6.214×10^{-4}
1 kilómetro	10^{5}	1000	1	3.937×10^{4}	3281	0.6214
1 pulgada	2.540	2.540×10^{-2}	2.540×10^{-5}	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1 pie	30.48	0.3048	3.048×10^{-4}	12	1	1.894×10^{-4}
1 milla	1.609×10^{5}	1609	1.609	6.336×10^{4}	5280	1

ÁREA

	metro^2	cm^2	ft^2	in^2
1 metro cuadrado	1	10^{4}	10.76	1550
1 centímetro cuadrado	10^{-4}	1	1.076×10^{-3}	0.1550
1 pie cuadrado	9.290x10-2	929.0	1	144
1 pulgada cuadrada	6.452×10^{-4}	6.452	6.994×10^{-3}	1

VOLUMEN

	m^3	cm^3	L	ft^3	in^3
1 metro cúbico	1	106	1000	35.31	6.102×10^{4}
1 centímetro cúbico	10-6	1	1.000x10-^{3}	3.351×10^{-5}	6.102×10^{-2}
1 litro	1.000×10^{-3}	1000	1	3.351×10^{-2}	61.02
1 pie cúbico	2.832×10^{-2}	2.832×10^{-4}	28.32	1	1728
1 pulgada cúbica	1.639×10^{-5}	16.39	1.639×10^{-2}	5.787×10^{-4}	1

DENSIDAD

	slug/ft³	kg/metro³	g/cm³	lb/ft³	lb/in³
1 slug/ft³	1	515.4	0.5154	32.17	$1.862x10^{-2}$
1 kg/metro³	$1.940x10^{-3}$	1	0.001	$6.243x10^{-2}$	$3.613x10^{-5}$
1 g/cm³	1.940	1000	1	62.43	$3.613x10^{-2}$
1 lb/ft³	$3.108x10^{-2}$	16.02	$1.602x10^{-2}$	1	$5.787x10^{-4}$
1 lb/in³	53.71	$2.768x10^{4}$	27.68	1728	1

Observaciones: Las unidades de densidad que contienen unidades de peso son dimensionalmente diferentes a las de masa. Véase la nota de tablas de masa.

TIEMPO

	y	d	h	min	segundo
1 año	1	365.25	$8.766x10^{3}$	$5.259x10^{5}$	$3.156x10^{7}$
1 día	$2.738x10^{-3}$	1	24	1440	$8.640x10^{4}$
1 hora	$1.141x10^{-4}$	$4.167x10^{-2}$	1	60	3600
1 minuto	$1.901x10^{-6}$	$6.944x10^{-4}$	$1.667x10^{-2}$	1	60
1 segundo	$3.169x10^{-8}$	$1.157x10^{-5}$	$2.778x10^{-4}$	$1.667x10^{-2}$	1

VELOCIDAD

	ft/s	km/s	m/s	mi/h	cm/s
1 pie por segundo	1	1.097	0.3048	0.6818	30.48
1 kilómetro por hora	0.9113	1	0.2778	0.6214	27.78
1 metro por segundo	3.821	3.6	1	2.237	100
1 milla por hora	1.467	1.609	0.447	1	44.70
1 centímetro por segundo	$3.281x10^{-2}$	$3.6x10^{-2}$	0.01	$2.237x10^{-2}$	1
1 nudo = 1 milla náutica por hora = 1.668ft/s 14mi/min = 60mi/h					

FUERZA

	dina	newton	lb	pdl	gf	kgf
1 dina	1	10-5	$2.248x10^{-6}$	$7.233x10^{-5}$	$1.020x10^{-3}$	$1.020x10^{-6}$
1 newton	105	1	0.2248	7.233	102.0	0.1020
1 libra	$4.448x10^{5}$	4.448	1	32.17	453.6	0.4536
1 poundal	$1.383x10^{4}$	0.1383	$3.108x10^{-2}$	1	14.10	$1.410x10^{-2}$
1 gramo fuerza	980.7	$9.807x10^{-3}$	$2.205x10^{-3}$	$7.093x10^{-2}$	1	
1 kilogramo fuerza	$9.807x10^{5}$	9.807	2.205	70.93	1000	0.001

Observaciones: Las cantidades sombreadas no son unidades de fuerza pero a menudo se utilizan como tales. Por ejemplo, si escribimos 1 gramo fuerza, queremos decir que un gramo masa experimenta una fuerza de 980.7 dinas en condiciones de gravedad estándar.

MASA

	g	kilogramo	slug	u	oz	lb	ton
1 gramo	1	0.001	$6.852x10^{-5}$	$6.022x10^{23}$	$3.527x10^{-2}$	$2.205x10^{-3}$	$1.102x10^{-6}$
1 kilogramo	1000	1	$6.852x10^{-2}$	$6.022x10^{26}$	35.27	2.205	$1.1022x10^{-3}$
1 slug	$1.459x10^{4}$	14.59	1	$8.786x10^{27}$	514.8	32.07	$1.609x10^{-2}$
1 u	$1.661x10^{-24}$	$1.661x10^{-27}$	$1.138x10^{-28}$	1	$5.857x10^{-26}$	$3.662x10^{-27}$	$1.830x10^{-30}$
1 onza	28.35	$2.835x10^{-2}$	$1.943x10^{-3}$	$1.718x10^{25}$	1	$6.250x10^{-2}$	$3.125x10^{-5}$
1 libra	453.6	0.4536	$3.108x10^{-2}$	$2.732x10^{26}$	16	1	0.0005
1 ton	$9.072x10^{5}$	907.2	62.16	$5.463x10^{29}$	$3.2x10^{4}$	2000	1

Observaciones: Las cantidades sombreadas no son unidades de masa pero a menudo se usan como tales. Por ejemplo, cuando escribimos 1kg=2.205lb significa que un kilogramo es una masa que pesa 2.205 libras en condiciones de gravedad estándar ($g = 9.80665 m/s^2$).

	BTU	erg	ft lb	hp h	joule	cal	kWh	eV	MeV	kg	u
1 unidad térmica británica	1	1.055×10^{10}	777.9	3.929×10^{-4}	1055	252.0	2.93×10^{-4}	6.585×10^{21}	6.585×10^{15}	1.174×10^{-14}	7.070×10^{12}
1 erg	9.481×10^{-11}	1	7.376×10^{-8}	3.725×10^{-14}	10^{-7}	2.389×10^{-8}	2.778×10^{-14}	6.242×10^{11}	6.242×10^{5}	1.113×10^{-24}	670.2 9.037×10^{9}
1 libra pie	1.285×10^{-3}	1.356×10^{7}	1	5.051×10^{-7}	1.356	0.3238	3.766×10^{-7}	8.464×10^{18}	8.464×10^{12}	1.509×10^{-17}	1.799×10^{16}
1 caballo de fuerza por hora	2545	2.685×10^{13}	1.980×10^{6}	1	2.685×10^{6}	6.413×10^{5}	0.7457	1.676×10^{25}	1.676×10^{19}	2.988×10^{-11}	6.702×10^{9}
1 joule	9.481×10^{-4}	107	0.7376	3.725×10^{-7}	1	0.2389	2.778×10^{-7}	6.242×10^{18}	6.242×10^{12}	1.113×10^{-17}	2.806×10^{10}
1caloría	3.969×10^{-3}	4.186×10^{7}	3.088	1.560×10^{-6}	4.186	1	1.163×10^{-6}	2.613×10^{19}	2.613×10^{13}	4.660×10^{-17}	2.413×10^{16}
1 kilowatt hora	3413	3.6×10^{13}	2.655×10^{6}	1.341	3.6×10^{6}	8.6×10^{5}	1	2.247×10^{25}	2.247×10^{19}	4.007×10^{-11}	1.074×10^{-9}
1 electrón volt	1.519×10^{-22}	1.602×10^{-12}	1.182×10^{-19}	5.967×10^{-26}	1.602×10^{-19}	3.827×10^{-20}	4.450×10^{-26}	1	10^{-6}	1.783×10^{-36}	1.074×10^{-3}
1 millón de electrón volts	1.519×10^{-16}	1.602×10^{6}	1.182×10^{-13}	5.967×10^{-20}	1.602×10^{-13}	3.827×10^{14}	4.450×10^{-20}	10^{6}	1	1.783×10^{-30}	6.022×10^{26}
1 kilogramo	8.521×10^{13}	8.987×10^{23}	6.629×10^{16}	3.348×10^{10}	8.987×10^{16}	2.146×10^{16}	2.497×10^{10}	5.610×10^{35}	5.610×10^{29}	1	1
1 unidad unificada de masa atómica	1.415×10^{-13}	1.492×10^{-3}	1.101×10^{-10}	5.559×10^{-17}	1.492×10^{-10}	3.564×10^{-11}	4.146×10^{-17}	9.32×10^{8}	932.0	1.661×10^{-27}	

Observaciones: Las cantidades sombreadas no son unidades de energía propiamente pero se incluyen por conveniencia. Provienen de la fórmula de equivalencia masa energía relativista y representan la energía equivalente de una masa de un kilogramo o unidad unificada de masa.

PRESIÓN

	atm	dina/cm^2	inH$_2$0	cmHg	pascal	lb/in^2	lb/^{2}
1 atmósfera	1	1.013x10^6	406.8	76	1.013x10^5	14.7	2116
1 dina por cm^2	9.869x10^7	1	4.015x10^{-4}	7.501x10^{-5}	0.1	1.405x10^{-5}	2.089x10^{-3}
1 in de agua 4ºC	2.458x10^{-3}	2491	1	0.1868	249.1	3.613x10^{-2}	5.202
1 cmHg a 0ºC	1.316x10^{-2}	1.333x10^4	5.353	1	13333	0.1934	27.85
1 pascal	9.869x10^{-6}	10	4.015x10^{-3}	7.501x10^{-4}	1	1.450x10^{-4}	2.089x10^{-2}
1 libra por in^2	6.805x10^{-2}	6.985x10^4	27.68	5.171	6.985x10^3	1	144
1 libra por ft^2	4.725x10^{-4}	478.8	0.1922	3.591x10^{-2}	47.88	6.944x10^{-3}	1

El valor de la gravedad es de 9.80665m/s^2. 1bar = 10^6 dinas/cm^2 = 0.1 MPa. 1 torr = 1mmHg

POTENCIA

	BTU/h	lb ft/s	hp	cal/s	kW	W
1 unidad térmica británica por hora	1	0.2161	3.929x10^{-4}	6.998x10^{-2}	2.930x10^{-4}	0.2390
1 libra pie por segundo	4.628	1	1.818x10^{-3}	0.3239	1.356x10^{-3}	1.356
1 caballo de fuerza	2545	550	1	178.1	0.7457	745.7
1 caloría por segundo	14.29	3.088	5.615x10^{-3}	1	4.186x10^{-3}	4.186
1 kilowatt	3413	737.6	1.341	238.9	1	1000
1 watt	3.413	0.7376	1.341x10^{-3}	0.2389	0.001	1

FLUJO MAGNÉTICO

	maxwell	weber
1 maxwell	1	10^{-8}
1 weber	108	1

CAMPO MAGNÉTICO

	gauss	tesla	milligauss
1 gauss	1	10^{-4}	1000
1 tesla	10^4	1	107
1 milligauss	0.001	10^{-7}	

Fuente: http://www.ieslaasuncion.org/fisicaquimica/sistema4.html

«No digas pocas cosas en muchas palabras, sino muchas cosas en pocas palabras»
Pitágoras.

¡Y la fantasía de este axioma se alcanza, precisamente, cuando están fuertemente imbricadas dos ciencias monumentales: la Física y las Matemáticas! La primera toma de la segunda, los estudios de las propiedades y relaciones entre entidades abstractas, como: números, figuras geométricas o símbolos matemáticos, y los convierte en potentes herramientas para la solución de los más disimiles problemas del ámbito natural.
El Capítulo I trata sobre la importantísima temática de los Sistemas de Unidades, y, más específicamente, el Sistema Internacional de Unidades, donde las variadas magnitudes físicas encuentran una simbología propia que las diferencian, y, los fenómenos físicos un modo de ser expresados cuantitativamente con la ayuda de los números reales. En el Capítulo II se aborda otra piedra angular de las matemáticas, y de una amplia utilización en las ciencias aplicadas e ingenierías: las relaciones trigonométricas; y, finalmente, el Capítulo III se ocupa del estudio de la física vectorial donde el extenso campo de las ingenierías poseen una herramienta de indiscutible valor.

Marcelo Nelson Navarro Ojeda, nació en la ciudad de Puerto Padre, en 1949; se graduó de Ingeniero Mecánico en 1977, en la Universidad de Oriente, Cuba, y de Doctor en Ciencias Técnicas: PhD en Ingeniería de la Construcción de Maquinarias, en la Universidad Técnica de Dresden, Alemania. Es Profesor Titular y Consultante de la República de Cuba; especialista en las cátedras de Física, Tribología y Metodología de la Investigación; actualmente docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo: ESPOCH. Durante su larga trayectoria académica, 43 años dedicados a la docencia y la investigación, ha recibido importantes reconocimientos de Instituciones de Educación Superior de: Cuba, Alemania, Venezuela y Angola; en el año 2005, recibió el Premio Nacional "Vida y Obra", otorgado por la República de Cuba.

Juan Rafael Pérez Pupo, nació en Holguín, antigua provincia de Oriente, Cuba. Es ingeniero mecánico, graduado en el Instituto Politécnico de Jarkov, Ucrania. Es máster en Ciencias en Ingeniería en la Especialidad de automática, Hidráulica y accionamiento Hidráulico, y doctor en ciencias técnicas (PhD). Actualmente es docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, y tiene 20 años de experiencia en la investigación y la docencia; ha publicado varios artículos científicos en revistas indexadas y ha recibido importantes reconocimientos.

«Es increíble que la matemática, habiendo sido creada por la mente humana, logre describir la naturaleza con tanta precisión».
Albert Einstein

ISBN: 978-9942-36-963-5
9 789942 369635